

**ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 2 (54)

2020

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Цупак А. А.</i> Проекционный метод решения скалярной задачи дифракции на неплоском жестком экране.....	3
<i>Яремко О. Э., Яремко Н. Н., Могилева Е. С.</i> Логарифмическая выпуклость изображений в теории интегральных преобразований.....	13
<i>Яремко О. Э., Яремко Н. Н., Могилева Е. С.</i> Кратные ряды Фурье и интегралы Фурье с неразделяющимися переменными	24
<i>Жидова Л. А.</i> Об особых решениях уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.....	38
<i>Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю., Шалдаева А. А.</i> Приближенные методы решения полисингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях	44
<i>Марченков С. С.</i> О проблеме выполнимости логико-автоматных формул	61
<i>Вельмисов П. А., Мизхер У. Д., Тамарова Ю. А.</i> Асимптотическое исследование процессов тепломассопереноса в струйных течениях.....	72
<i>Редькина Т. В., Новикова О. В.</i> Анализ нелинейных уравнений в частных производных, связанных с оператором рассеяния третьего порядка.....	82

ФИЗИКА

<i>Журавлев В. М.</i> Об одной нелинейной интегрируемой модели взаимодействия волн	94
--	----

**UNIVERSITY PROCEEDINGS
VOLGA REGION
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

№ 2 (54)

2020

CONTENT

MATHEMATICS

<i>Tsupak A. A.</i> Projective method for solving the scalar diffraction problem on a nonplanar rigid screen	3
<i>Yaremko O. E., Yaremko N. N., Mogileva E. S.</i> Logarithmic image's convexity in the integral transforms theory	13
<i>Yaremko O. E., Yaremko N. N., Mogileva E. S.</i> Multiple Fourier series and Fourier integrals with non-separable variables	24
<i>Zhidova L. A.</i> On singular solutions of Clairaut equations in the theory of ordinary differential and partial derivative equations	38
<i>Boykov I. V., Kudryashova N. Yu., Shaldaeva A. A.</i> An approximate methods for solving polysingular integral equations in degenerate cases.....	44
<i>Marchenkov S. S.</i> On the problem of logic-automatic formulas performability	61
<i>Vel'misov P. A., Mizkher U. D., Tamarova Yu. A.</i> Asymptotic study of heat and mass transfer processes in jet flows	72
<i>Red'kina T. V., Novikova O. V.</i> Analysis of nonlinear equations in private derivatives associated with the third-order scattering operator	82

PHYSICS

<i>Zhuravlev V. M.</i> On one nonlinear integrable model of wave interaction	94
--	----

УДК 517.958:535.4, 519.642.2
DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-1

А. А. Цупак

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА НЕПЛОСКОМ ЖЕСТКОМ ЭКРАНЕ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – теоретическое обоснование численного метода решения задачи рассеяния акустической волны неплоским гладким бесконечно тонким акустически жестким экраном.

Материалы и методы. Рассматривается интегродифференциальное уравнение задачи дифракции на экране; оператор уравнения рассматривается как отображение в подходящих пространствах Соболева; для численного решения задачи используется метод Галеркина.

Результаты. Доказана сходимость метода Галеркина в задаче дифракции на акустически жестком экране; предложен способ построения базисных функций на неплоских гладких параметризуемых экранах, проведены вычислительные эксперименты.

Выводы. Результаты вычислительных экспериментов согласуются с основным теоретическим результатом работы о сходимости методов Галеркина; описанный численный метод является эффективным и может применяться для решения более сложных задач дифракции акустических волн.

Ключевые слова: дифракция на акустически жестком экране, интегродифференциальные уравнения, сходимость метода Галеркина

А. А. Tsupak

PROJECTIVE METHOD FOR SOLVING THE SCALAR DIFFRACTION PROBLEM ON A NONPLANAR RIGID SCREEN

Abstract.

Background. The aim of the work is theoretical justification of a numerical method for solving a scattering problem of acoustic waves by infinitely thin curvilinear acoustically hard screens.

Material and methods. The integral differential equation of the problem of diffraction on a screen is considered; the operator of the equation is considered as a mapping in suitable Sobolev spaces; Galerkin method is used for numerical solving of the problem.

Results. The convergence of the Galerkin method in the problem of diffraction on an acoustically rigid screen is proved; a method for constructing basis functions

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-01-00219А.

© Цупак А. А., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

on non-plane smooth parameterizable screens is proposed, computational experiments are carried out.

Conclusions. The results of the numerical experiments coincide with the main theoretical result of the study; the described approach can be used for solving complicated problems of acoustic scattering.

Keywords: diffraction on an acoustically rigid screen, integral differential equations, convergence of the Galerkin method

Введение

Рассматривается задача дифракции монохроматической акустической волны на незамкнутом гладком неплоском экране. В случае, когда экран является акустически жестким, задача сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению по поверхности экрана.

Известные результаты [1] об эллиптичности оператора уравнения в подходящих пространствах Соболева позволяют доказать сходимость метода Галеркина, если базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в области определения оператора [2].

Если экран является плоским, то в качестве таких базисных функций можно выбрать кусочно-линейные финитные функции с шестиугольным носителем [3]. В статье [4] описан проекционный метод решения задачи дифракции и приведены результаты расчетов на плоских экранах различной формы.

В данной работе рассмотрен случай, когда акустически жесткий экран не является плоским, а представляется гладкой параметризуемой поверхностью.

Основной трудностью в реализации численного метода решения задачи дифракции на таких экранах является построение расчетных сеток и введение удобных базисных функций. Наиболее распространенный подход состоит в замене гладкого экрана кусочно-плоским (см. работы [5, 6] и имеющуюся там библиографию). Этот подход удобен с точки зрения вычислений. Однако доказательство сходимости проекционного метода чрезвычайно затруднительно, так как исходное пространство решений, определенных на гладком экране, фактически заменяется совершенно иным функциональным пространством.

Предложенный в настоящей работе подход свободен от этих формальных трудностей, так как базисные функции строятся именно на заданном экране, а не на его «приближениях».

В работе показано, что на любой ориентируемой параметризуемой гладкой поверхности можно ввести системы финитных базисных функций, удовлетворяющих условию аппроксимации в пространстве Соболева на многообразии с краем.

Метод Галеркина был программно реализован, проведен ряд вычислительных экспериментов, подтвердивших результат о сходимости метода. В разд. 2 статьи предложен результат сравнения полученных приближенных решений с известным аналитическим решением задачи дифракции на единичной сфере. Далее предложены результаты решения на гладком ограниченном экране, экспериментально подтверждающие сходимость метода Галеркина.

1. Интегродифференциальное уравнение задачи дифракции

Пусть Ω – гладкая (класса C^∞) незамкнутая ориентируемая ограниченная поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически с помощью вектор-функции

$$x(t) = (x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2)). \quad (1)$$

Функция $x(t)$ с плоской областью определения $T \subset \mathbb{R}^2$ является диффеоморфизмом и в любой точке $t \in T$ ее матрица Якоби $J(t) = \frac{\partial x}{\partial t}$ имеет ранг, равный 2. Пусть на экране некоторым образом задано поле нормалей $\mathbf{n}$.

Задача дифракции монохроматической акустической волны, гармонически зависящей от времени, сводится [1, 7, 8] к интегродифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G(x, y) \varphi(y) ds_y \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь $G(x, y) = \frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ – фундаментальное решение уравнения

Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$; k_e – заданное волновое число свободного пространства; $u_0(x)$ – функция, описывающая падающую волну.

Оператор S уравнения (2) будем рассматривать как псевдодифференциальный оператор:

$$S: \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega).$$

Пространства Соболева $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}), H^{-1/2}(\Omega)$ на незамкнутом гладком экране определим стандартным образом. Рассмотрим Ω как подмногообразие гладкого многообразия Ω_0 без края. Пусть $\{U_\alpha\}$ – конечное покрытие Ω_0 координатными окрестностями, которые отображаются диффеоморфизмами $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ в $\mathbb{R}^2$. Предположим также, что для покрытия $\{U_\alpha\}$ задано подчиненное этому покрытию разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$. Норма в пространстве Соболева $H^s(\Omega_0)$ определяется следующим образом [9]:

$$\|u\|_{H^s(\Omega_0)} = \sum_{\alpha} \|u(\kappa_\alpha^{-1}(t))\varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t))\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Теперь $\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) = \{u \in H^s(\Omega_0) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega}\}$ – пространство функций из $H^s(\Omega_0)$ с компактным носителем в $\bar{\Omega}$, а $H^s(\Omega) = \{u|_{\Omega} : u \in H^s(\Omega_0)\}$ – пространство сужений элементов $H^s(\Omega_0)$ на Ω .

2. Сходимость метода Галеркина

Метод Галеркина для уравнения

$$S\varphi = f, S: \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega) \quad (3)$$

состоит в решении системы

$$\langle S\varphi_N, v_i \rangle = \langle f, v_i \rangle, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где полуторалинейная форма $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} ds$ определяет антидвойственное спаривание пространств $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$ и $H^{-1/2}(\Omega)$, а v_i – базисные функции; φ_N – приближенное решение уравнения (3), записываемое в виде линейной комбинации функций v_i с неизвестными коэффициентами c_i :

$$\varphi_N(x) := \sum_{i=1}^N c_i v_i(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Опишем построение базисных функций на произвольном гладком параметризуемом экране Ω .

Пусть $B = B_r(t_0)$ – некоторый открытый круг радиуса r такой, что $\bar{D} \subset B$ и $\text{dist}(\partial D, \partial B) > 0$. Пусть также $B' = B_{r+\delta}(t_0)$ – круг радиуса $r + \delta, \delta > 0$. Рассмотрим образы кругов B и B' при введенном отображении $x(t)$. Эти образы суть поверхности $\Omega_{B'} \supset \Omega_B \supset \Omega$, причем $\text{dist}(\partial \Omega_{B'}, \partial \Omega_B) = d' > 0$ и $\text{dist}(\partial \Omega_B, \partial \Omega) = d > 0$.

На прямоугольнике $T = [0; a] \times [0; b]$ введем финитные кусочно-линейные функции $v_i^0(t)$ с шестиугольным носителем. Эти функции определены и подробно исследованы в [3], их применение для решения задачи дифракции на плоском экране описано в [4].

В качестве базисных функций $v_i(x)$ на гладком параметризуемом экране Ω рассмотрим функции

$$v_i(x) = v_i^0(\kappa(x)), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Здесь $\kappa(x): \Omega \rightarrow T$ есть отображение, обратное к $x(t)$. Равенство (6) можно записать в эквивалентной форме как

$$v_i(x(t)) = v_i^0(t), \quad t \in T.$$

На рис. 1 приведен график базисной функции v_i^0 (на прямоугольном экране) и графики v_i (на криволинейных экранах).

Докажем теорему о сходимости метода Галеркина.

Теорема 1. Пусть Ω – гладкая ориентируемая незамкнутая поверхность, заданная параметрически. Пусть базисные функции на Ω определены формулой (6). Тогда метод Галеркина сходится для оператора $S: \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega)$.

Доказательство. 1. Оператор S является эллиптическим [1] и инъективным, так как решение однородного интегродифференциального уравнения отвечает решению однородной краевой задачи для уравнения Гельмгольца, что, в свою очередь, следует из эквивалентности дифференциальной и интегральной постановок задачи дифракции [10, 11].

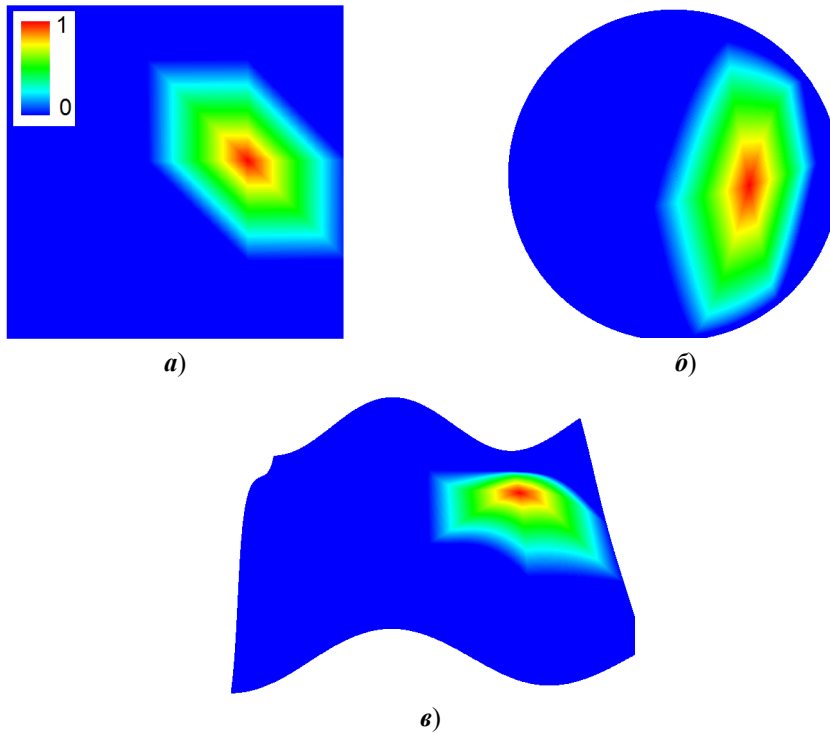


Рис. 1. Базисная функция v_i^0 на T (а); базисная функция v_i на единичной сфере (б); базисная функция v_i на поверхности $x_3 = 0,1 \cos(8x_1) \cos(6x_2)$ (в)

2. Таким образом, для доказательства сходимости метода достаточно [2] проверить, что введенные базисные функции удовлетворяют свойству аппроксимации.

Так как экран параметризуется с помощью гладкой функции $x(t): T \rightarrow \Omega$, а функции $v_i^0(t)$ принадлежат $\tilde{H}^{1/2}(\bar{T})$, то [9] имеет место включение $v_i(x) \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$.

3. Проверим, что v_i ($i=1, \dots, N, N \in \mathbb{N}$) образуют полную систему функций в пространстве $\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$. Покажем, что для всякого элемента $v(x) \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$ при любом $\varepsilon > 0$ найдутся коэффициенты c_i ($i=1, \dots, N$) такие, что

$$\|v - v_N\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})} = \left\| v - \sum_{i=1}^N c_i v_i \right\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})} < \varepsilon.$$

В плоскости параметров t_1, t_2 определим гладкую финитную функцию $\varphi_T(t)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\varphi_T \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \varphi_T(t) = \begin{cases} 1, & t \in \bar{T}, \\ 0, & t \notin B'. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x) = \varphi_T(\kappa(x))$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi \in C^\infty(\Omega_{B'}), \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & x \in \Omega_{B'} \setminus \Omega_B. \end{cases}$$

Введем гладкую замкнутую поверхность $\tilde{\Omega}$ класса C^∞ , содержащую $\Omega_{B'}$. На $\tilde{\Omega}$ введем атлас $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}$ и подчиненное данному покрытию разбиение единицы φ_α так, чтобы при $\alpha_0 = 0$ выполнялось $U_{\alpha_0} = U_0 = \Omega_{B'}$, $\kappa_0(x) = \kappa(x)$.

Пусть $v \in \tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})$ – произвольная функция. Тогда определено ее продолжение нулем $\varepsilon_0 v \in H^{1/2}(\tilde{\Omega})$; также и $\varepsilon_0 v_i(x) \in H^{1/2}(\tilde{\Omega})$. Выполняя замену переменных, запишем

$$\begin{aligned} v(x(t_1, t_2)) &= v(\kappa^{-1}(t)) = v_T(t_1, t_2) \in \tilde{H}^{1/2}(T), \\ v_i(x(t_1, t_2)) &= v_i(\kappa^{-1}(t)) = v_i^0(t_1, t_2), t \in T; \end{aligned}$$

Так как функции v_i^0 удовлетворяют условию аппроксимации [11] в пространстве $\tilde{H}^{1/2}(\bar{T})$, то для v_T при произвольном $\varepsilon > 0$ можно так определить коэффициенты в линейной комбинации $v_{T,N}(t) = \sum_i c_i v_i^0(t)$, что

$$\|v_T - v_{T,N}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{T})} = \|\varepsilon_0 v_T - \varepsilon_0 v_{T,N}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon,$$

откуда и выведем нужную оценку:

$$\begin{aligned} \|v - v_N\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega})} &= \|\varepsilon_0 v - \varepsilon_0 v_N\|_{\tilde{H}^{1/2}(\bar{\Omega}_{B'})} = \\ &= \sum_\alpha \|\varepsilon_0 v(\kappa_\alpha^{-1}(t)) \varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t)) - \varepsilon_0 v_N(\kappa_\alpha^{-1}(t)) \varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t))\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \|\varepsilon_0 v(\kappa^{-1}(t)) \varphi(\kappa^{-1}(t)) - \varepsilon_0 v_N(\kappa^{-1}(t)) \varphi(\kappa^{-1}(t))\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \|\varepsilon_0 v_T - \varepsilon_0 v_{T,N}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь учтено определение сглаживающей функции на неплоском экране, задание поверхности Ω с помощью одной карты и соотношения между координатами точек Ω и T . Теорема доказана.

3. Описание вычислительных экспериментов и результаты расчетов

Для тестирования сходимости метода Галеркина проведено сравнение полученных приближенных решений v_N (при различном числе N базисных функций) с аналитическим решением задачи.

Пусть $\Omega = S_1(0)$ – единичная сфера с центром в начале координат, заданная параметрически:

$$x_1 = \cos \theta \cos \varphi, \quad x_2 = \cos \theta \sin \varphi, \quad x_3 = \sin \theta, \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2], \quad \varphi \in [0; 2\pi).$$

Известно [6], что собственными функциями интегродифференциального уравнения (2) являются функции вида

$$s_{n,m}(x) = P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi),$$

$$P_n^m(u) = (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u),$$

где $P_n(u)$ – полиномы Лежандра, а θ, φ – сферические координаты точки $x \in S_1(0)$. График модуля функции $s_{3,3}$ представлен на рис. 2.

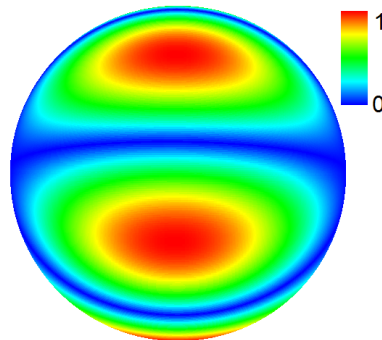


Рис. 2. График модуля собственной функции $v = s_{3,3}$ уравнения (2) на единичной сфере $S_1(0)$

На рис. 3 представлены графики приближенных решений v_N , найденных согласно методу Галеркина.

В качестве конкретной проблемы рассмотрена задача дифракции монохроматической волны с амплитудой $u_0(x) = e^{ik_e(0,8x_2 - 0,6x_3)} + e^{-ik_e x_1} / 10$ на экране, определенном с помощью явной зависимости x_3 от x_1, x_2 :

$$\Omega = \{x : x_3 = 0,1 \cos(8x_1) \cos(6x_2), \quad x_1, x_2 \in [0;1]\}.$$

Графики приближенных решений v_N этой задачи, представленные на рис. 4, также подтверждают сходимость численного метода.

Заключение

Рассмотрена задача дифракции акустической волны на неплоском акустически жестком экране. Сформулирован метод Галеркина решения сингулярного интегродифференциального уравнения по поверхности экрана. На неплоских параметрически заданных экранах определены базисные функции и доказано свойство аппроксимации в пространстве решений интегродифференциального уравнения. Проекционный метод программно реализован, выполнен ряд вычислительных тестов.

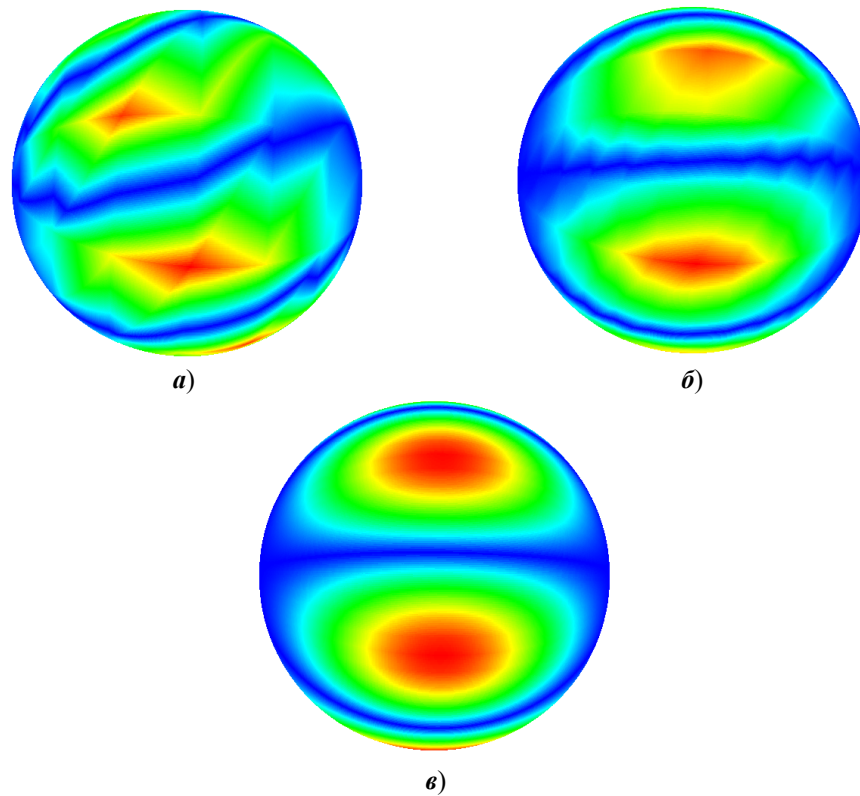


Рис. 3. Приближенные решения v_N интегродифференциального уравнения на единичной сфере: *a* – $N = 49$; *б* – $N = 225$; *в* – $N = 3969$

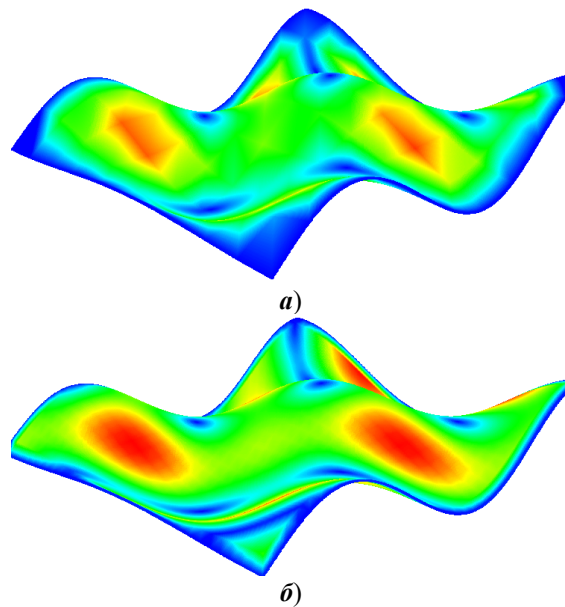


Рис. 4. Приближенные решения задачи рассеяния на криволинейном экране: *a* – $N = 81$; *б* – $N = 3969$

Проведенные эксперименты и сравнение приближенных решений модельной задачи с ее известным аналитическим решением подтвердили сходимость метода Галеркина, правильность его программной реализации и высокую эффективность.

Библиографический список

1. **Stephan, E. P.** Boundary integral equations for screen problems in $\mathbb{R}^3$ / E. P. Stephan // *Integral equations and potential theory*. – 1987. – Vol. 10. – P. 236–257.
2. **Kress, R.** *Linear integral equations* / R. Kress. – Berlin : Springer-Verlag, 1989. – 299 p.
3. **Марчук, Г. И.** Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – Москва : Наука, 1981. – 416 с.
4. **Романова, Н. В.** Решение задачи дифракции акустической волны на системе жестких экранов методом Галеркина / Н. В. Романова, А. А. Цупак // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2016. – № 2 (38). – С. 54–66.
5. **Лебедева, С. Г.** О решении задач дифракции волн методом интегральных уравнений / С. Г. Лебедева // *Антенны*. – 2013. – № 2. – С. 3–6.
6. **Daeva, S. G.** Numerical Simulation of Scattering of Acoustic Waves by Inelastic Bodies using Hypersingular Boundary Equation / S. G. Daeva, A. V. Setukha // *AIP Conference Proceedings*. – 2015. – Vol. 1648. – P. 39004-1.
7. **Смирнов, Ю. Г.** Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции на частично экранированном неоднородном теле / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // *Дифференциальные уравнения*. – 2015. – Т. 51, № 9. – С. 1234.
8. **Смирнов, Ю. Г.** Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Москва : RuScience, 2016. – 223 с.
9. **Агранович, М. С.** Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей / М. С. Агранович. – Москва : МЦНМО, 2013. – 379 с.
10. **Цупак, А. А.** О единственности решения задачи дифракции акустической волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / А. А. Цупак // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2014. – № 1. – С. 30–38.
11. **Смирнов, Ю. Г.** Метод интегральных уравнений в скалярной задаче дифракции, состоящей из «мягкого» и «жесткого» экранов и неоднородного тела / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // *Дифференциальные уравнения*. – 2014. – Т. 50, № 9. – С. 1164–1174.

References

1. Stephan E. P. *Integral equations and potential theory*. 1987, vol. 10, pp. 236–257.
2. Kress R. *Linear integral equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 299 p.
3. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. *Vvedenie v proektsionno-setochnye metody* [Introduction to projection-grid methods]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p. [In Russian]
4. Romanova N. V., Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2016, no. 2 (38), pp. 54–66. [In Russian]
5. Lebedeva S. G. *Antenny* [Antennas]. 2013, no. 2, pp. 3–6. [In Russian]
6. Daeva S. G., Setukha A. V. *AIP Conference Proceedings*. 2015, vol. 1648, pp. 39004-1.
7. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2015, vol. 51, no. 9, pp. 1234. [In Russian]

8. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel* [Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and inhomogeneous bodies]. Moscow: RuScience, 2016, 223 p. [In Russian]
9. Agranovich M. S. *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastiakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, their generalizations, and elliptic problems in domains with smooth and Lipschitz boundaries]. Moscow: MTsNMO, 2013, 379 p. [In Russian]
10. Tsupak A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 1, pp. 30–38. [In Russian]
11. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2014, vol. 50, no. 9, pp. 1164–1174. [In Russian]

Цупак Алексей Александрович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Tsupak Aleksey Aleksandrovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-
department of mathematics and supercom-
puter modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Цупак, А. А. Проекционный метод решения скалярной задачи дифракции на неплоском жестком экране / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 3–12. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-1.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ВЫПУКЛОСТЬ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Метод интегральных преобразований является одним из важнейших аналитических методов математического моделирования. На его основе разрабатываются численные методы и вычислительные алгоритмы. Свойства изображений косвенным образом отражают свойства оригиналов. Иногда, например для изображений Фурье, эти свойства содержат в себе новую информацию об оригинале. Статья посвящена исследованию логарифмической выпуклости изображения для неотрицательного оригинала.

Материалы и методы. Методы информационной геометрии позволили впервые установить свойства интегральных преобразований Фурье исследованием соответствующей информационной матрицы Фишера. В получении результатов были также использованы методы теории интегральных преобразований Лапласа, Меллина, Вейерштрасса и др.

Результаты. Найдена формула для информационной матрицы Фишера и тензора деформации для рандомизированных семейств распределений, связанных с интегральными преобразованиями Лапласа, Меллина, Вейерштрасса. Установлена логарифмическая выпуклость изображения для неотрицательного оригинала. Предложено новое доказательство логарифмической выпуклости Гамма-функции и неравенства о моментах распределения.

Выводы. Предложенные методы могут быть полезны при изучении специальных функций математической физики, в теории интегралов дробного порядка. Наличие явного выражения информационной матрицы важно для применений в статистике.

Ключевые слова: логарифмическая выпуклость, интегральное преобразование, плотность распределения, матрица Фишера.

O. E. Yaremko, N. N. Yaremko, E. S. Mogileva

LOGARITHMIC IMAGE'S CONVEXITY IN THE INTEGRAL TRANSFORMS THEORY

Abstract.

Background. The method of integral transforms is one of the most important analytical methods of mathematical modeling. Numerical methods and computational algorithms are developed on its basis. Image properties indirectly reflect the properties of the originals. Sometimes, for example, for Fourier images, these properties contain new information about the original. The article is devoted to the study of the logarithmic convexity of the image for a non-negative original.

Materials and methods. Methods of information geometry allowed us to establish the properties of integral Fourier transforms for the first time by studying the

corresponding Fisher information matrix. Methods of Laplace, Mellin, Weierstrass and others integral transforms theory were also used in obtaining the results.

Results. Formula for the Fischer information matrix and stress tensor for randomized families of distributions associated with Laplace, Mellin, and Weierstrass integral transforms is found. The logarithmic image's convexity for a non-negative original is established. A new proof of the logarithmic convexity of the Gamma-function and the moments inequality of distribution is proposed.

Conclusions. The proposed methods can be useful in the study of special functions of mathematical physics, in the theory of fractional-order integrals. Having an explicit expression of the information matrix is important for statistical applications.

Keywords: logarithmic convexity, integral transform, the density distribution, the Fisher matrix.

Введение

Интегральным преобразованием является любое преобразование $f(\xi) \rightarrow F(\theta)$ следующего вида:

$$F(\theta) = \int_a^b K(\xi, \theta) f(\xi) d\xi. \quad (1)$$

На вход этого преобразования подается функция f , а на выходе получается функция $F(\lambda)$. Интегральное преобразование – это специальный вид математического оператора. Существует множество полезных интегральных преобразований. Каждое из них определяется выбором ядра, т.е. функции $K = K(\xi, \theta)$ из двух переменных.

Имеется много классов задач, которые трудно решить или, по крайней мере, они довольно громоздки алгебраически в их первоначальных представлениях. Интегральное преобразование «отображает» уравнение из его исходной «области» в другую область. Решение дифференциальных и интегральных уравнений в пространстве изображений часто намного проще, чем решение в пространстве оригиналов. Обратным интегральным преобразованием по изображению решения восстанавливается оригинал. Для некоторых интегральных преобразований важна информация об изображении сигнала (о спектре сигнала). Таким образом, оказывается важным изучение свойств изображений.

Ядра важнейших интегральных преобразований Лапласа, Меллина, Вейерштрасса и др. являются плотностями распределений экспоненциального, гамма-распределения, нормального распределения соответственно. В работе изучаются интегральные преобразования (1), в которых ядро $K = K(\xi, \theta)$, плотность распределения, зависящая от параметра θ , а $f(\xi)$ – некоторая неотрицательная функция. Тогда получим однопараметрическое семейство S плотностей распределения [1]:

$$p(\xi | \theta) = \frac{K(\xi, \theta) f(\xi)}{F(\theta)}.$$

Нас будет интересовать чувствительность случайной величины к параметру $\theta \in R$. Другими словами, характер варьирования распределения этой случайной величины при изменении значения параметра $\theta \in R$. В качестве метрики, которая определяет расстояние между двумя распределениями из семейства $P_\theta | \theta \in R$, было выбрано количество информации Фишера, содержащееся в наблюдениях. В скалярном случае $P_\theta | \theta \in R^1$ расстояние определяется по формуле

$$I(\theta) = \int p \partial \ln p \partial \ln p d\xi, \partial = \partial / \partial \theta.$$

Если параметр n -мерный, причем $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in R^m$, то рассматривается информационная матрица Фишера размерности $m \times m$ с элементами, определяемыми по одной из двух формул:

$$I_{ij}(\theta) = \int p \partial_i (\ln p) \partial_j (\ln p) d\xi, \partial_i = \partial / \partial \theta^i, \quad (2)$$

$$I_{ij}(\theta) = - \int p \partial_{ij} (\ln p) d\xi, \partial_{ij} = \partial^2 / \partial \theta^i \partial \theta^j. \quad (3)$$

В работе [2] С. Рао на основе фишеровской информационной матрицы (2) определил риманову метрику

$$ds^2 = \sum_{i,j}^n I_{ij}(\theta) dt^i dt^j$$

на многообразии распределений вероятностей $P_\theta | \theta \in R^n$ и тензор деформации T , тем самым заложил основы информационной геометрии. Компоненты T_{ijk} тензора деформации С. Рао определяет по формулам:

$$T_{ijk}(\theta) = -\frac{1}{2} \int p \partial_i (\ln p) \partial_j (\ln p) \partial_k (\ln p) d\xi. \quad (4)$$

Основной результат работы состоит в определении зависимости изображения $F(\lambda)$ и информационной матрицы (2). Эта зависимость имеет вид

$$I(\theta) = \partial_\theta^2 \ln F(\theta).$$

Таким образом, будет доказано что изображение функции $F(\lambda)$ является логарифмически выпуклой функцией [3] параметра θ . Кроме того, установлена ее вероятностная интерпретация.

1. Информационное расстояние для интегральных преобразований Лапласа от неотрицательных оригиналов

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ – неотрицательна на действительной полуоси, а функция $F(\theta)$ – ее преобразование Лапласа [4], определяемое формулой

$$F(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta\xi} f(\xi) d\xi,$$

тогда функция

$$p(\xi, \theta) = \frac{e^{-\theta\xi} f(\xi)}{F(\theta)}$$

является плотностью распределения, здесь θ – параметр семейства S распределений вероятностей.

Доказательство. Во-первых, $p(\xi, \theta) \geq 0$; во-вторых:

$$\int_0^{\infty} p(\xi, \theta) d\xi = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\theta\xi} f(\xi) d\xi}{F(\theta)} = \frac{F(\theta)}{F(\theta)} = 1.$$

Теорема 1. Информационное расстояние Фишера $I(\theta)$, соответствующее семейству S распределений вероятностей, находится по формуле $I(\theta) = \partial_{\theta}^2 \ln F(\theta)$. Компонента структурного тензора T имеет вид

$$T = -\frac{1}{2} \partial_{\theta}^3 \ln F(\theta).$$

Доказательство. Вычислим расстояние Фишера. Для этого найдем

$$\partial^2 (\ln p(\xi, \theta)) = \partial_{\theta}^2 (-\theta\xi + \ln f(\xi) - \ln F(\theta)) = -\partial_{\theta}^2 (\ln F(\theta)).$$

Тогда согласно формуле (2) получим

$$I = \partial_{\theta}^2 \ln F(\theta).$$

Аналогично доказывается формула для тензора T .

Следствие 1. Преобразование Лапласа неотрицательной функции $f(x)$ – логарифмически выпуклая функция параметра θ .

Пример 1. Если выбрать функцию $f(\xi)$ в виде

$$f(\xi) = \begin{cases} (\xi^2 - 1)^{v-\frac{1}{2}}, \xi > 1, \\ 0, \xi \leq 1, v > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

то на основании формулы для функции Бесселя [5]

$$K_v(\theta) = \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{\theta}{2}\right)^v}{\Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_1^{\infty} (\xi^2 - 1)^{v-\frac{1}{2}} e^{-\theta\xi} d\xi, \quad \operatorname{Re}(v) > -\frac{1}{2}, |\operatorname{Arg}(z)| < \frac{\pi}{2}$$

получаем, что функция $\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-v} K_v(\theta)$ – логарифмически выпуклая функция переменного θ .

2. Информационное расстояние для интегральных преобразований Меллина от неотрицательных оригиналов

Прямое преобразование Меллина определяется формулой [7]:

$$F(\theta) = \int_0^{\infty} \xi^{\theta-1} f(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на действительной полуоси, а функция $F(\theta)$ определяется формулой (1), тогда функция

$$p(\xi, \theta) = \frac{\xi^{\theta-1} f(\xi)}{F(\theta)}$$

является плотностью распределения, здесь θ – параметр семейства S распределений вероятностей.

Теорема 2. Информационное расстояние Фишера находится по формуле $I = \partial_{\theta}^2 \ln F(\theta)$. Компоненты структурного тензора имеют вид

$$T = -\frac{1}{2} \partial_{\theta}^3 \ln F(\theta).$$

Доказательство. Вычислим расстояние Фишера. Для этого найдем

$$\begin{aligned} \partial(\ln p(\xi, \theta)) &= \partial_{\theta}((\theta-1) \ln \xi + \ln f(\xi) - \ln F(\theta)) = \\ &= \ln \xi - \partial_{\theta}(\ln F(\theta)), \end{aligned}$$

тогда

$$I = \partial_{\theta}^2 \ln F(\theta).$$

Следствие 2. Преобразование Меллина распределения есть логарифмически выпуклая функция параметра θ .

Пример 2. Пусть $f(\xi) = e^{-\xi}$, тогда $F(\theta) = \Gamma(\theta)$. Значит, Гамма функция логарифмически выпукла. Определение Гамма-функции и другое доказательство ее логарифмической выпуклости, основанное на разложении в ряд на простейшие дроби логарифма Гамма-функции, можно найти в [5].

Замечание. Пусть функции $f(x), g(x)$ неотрицательны на действительной полуоси, а функция $F(v)$ определяется формулой

$$F(v) = \int_0^{\infty} g^{v-1/2}(\xi) f(\xi) d\xi, \quad (6)$$

тогда функция

$$p(\xi, \nu) = \frac{g^{\nu-1/2}(\xi) f(\xi)}{F(\nu)}$$

является плотностью распределения, здесь ν – параметр семейства S распределений вероятностей. Информационное расстояние Фишера находится по формуле

$$I = \partial_{\nu}^2 \ln F(\nu).$$

Компоненты структурного тензора имеют вид

$$T = -\frac{1}{2} \partial_{\nu}^3 \ln F(\nu).$$

Доказательство проводится, как в теоремах 1 и 2.

Пример 3. Пусть

$$f(\xi) = e^{-\xi\theta}, g(\xi) = \begin{cases} \xi^2 - 1, & \xi > 1, \\ 0, & 0 \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

тогда

$$F(\nu) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{-\nu} K_{\nu}(\theta) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) -$$

логарифмически выпуклая функция параметра ν . Здесь $K_{\nu}(\theta)$ – бесселева функция мнимого аргумента [5].

Теорема 3 (Неравенства для моментов). Для любой случайной величины X математическое ожидание величины $|X|^{\theta}$, которое принято называть моментом порядка θ [6]:

$$u(\theta) = E(|X|^{\theta}), \quad \theta \geq 0,$$

является функцией, логарифмически выпуклой по θ в каждом интервале, где она конечна.

Доказательство. Рассмотрим рандомизированную плотность

$$p(\xi, \theta) = \frac{|\xi|^{\theta} f(\xi)}{u(\theta)}.$$

На основании формулы (2) получим, что

$$I(\theta) = \partial_{\theta}^2 \ln u(\theta).$$

Следовательно, функция $u(\theta)$ – логарифмически выпуклая.

Замечание. Функция $u(\theta)$ называется моментом порядка θ [6].

3. Информационное расстояние для интеграла дробного порядка от неотрицательных оригиналов

Пусть функция $y = f(x)$ задана на неотрицательной полуоси $x \geq 0$. Интегралом порядка ν от функции $y = f(x)$ называют оператор вида [7]:

$$I^\nu f = \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1} f(x\xi) d\xi.$$

По рассмотренной выше схеме получаем, что функция $\Gamma(\nu)x^{-\nu}I^\nu f$ – логарифмически выпуклая по параметру ν .

Пример 4. Пусть $f(x) = e^{-x}$, тогда на основании интегрального представления функции Миттаг-Леффлера $E_1(z, \mu+1)$ из [5]

$$E_1(z, \mu+1) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-\varepsilon)^{\mu-1} e^{z\varepsilon} d\varepsilon$$

закключаем, что функция $\Gamma(\mu)E_1(z, \mu+1)$ – логарифмически выпуклая по μ .

4. Информационное расстояние для интегрального преобразования Вейерштрасса от неотрицательных оригиналов

В математике преобразование Вейерштрасса [2] функции $f: R \rightarrow R$, представляет собой «сглаженную» версию $f(x)$, полученную путем усреднения значений f , взвешенных с гауссовым центром в точке x . В частности, это функция $F(\lambda)$, определяемая по формуле

$$F(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(\theta-\xi)^2/4} d\xi.$$

Теорема 4. Для неотрицательной функции $f(x)$ на действительной оси функция

$$2\sqrt{\pi}F(\theta)e^{\theta^2/4} -$$

логарифмически выпуклая переменной θ .

Доказательство. Рассмотрим плотность распределения:

$$p(\xi, \theta) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(\theta-\xi)^2/4} f(\xi)}{F(\theta)},$$

тогда выполнено условие

$$2\sqrt{\pi}F(\theta)^{\frac{\theta^2}{4}} = e^{\frac{\theta\xi}{2}} \frac{e^{\xi^2/4} f(\xi)}{p(\xi, \theta)}.$$

Далее рассуждения проводим по образцу теоремы 2.

Следствие 3. Если неотрицательная функция представлена рядом по полиномам Эрмита [8]:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n \left(\frac{x}{2} \right), \quad x \in R,$$

то ряд Маклорена вида

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n$$

сходится для всех $\theta \in R$, а функция $e^{\frac{\theta^2}{4}} F(\theta)$ – логарифмически выпуклая.

Доказательство. На основе формулы из [8]:

$$W \left[H_n \left(\frac{x}{2} \right) \right] = x^n,$$

получим равенство $W[f(x)] = F(x)$.

5. Информационное расстояние для интеграла Пуассона от неотрицательных оригиналов

Пусть для неотрицательной функции $f(x)$, $x \in R$, а функция $u(t, x)$ – решение соответствующей задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t' = u_{xx}'', & 0 < t \leq T, \\ u(0, x) = f(x), & x \in R. \end{cases}$$

Известно, что справедлива формула Пуассона

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{R^n} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} f(\xi) d\xi.$$

Определим новые параметры:

$$\theta = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{4t}.$$

По представленной выше схеме мы получим, что функция

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta_0}} \exp(\theta^2) u \left(\frac{1}{4\theta_0}, \frac{\theta}{\sqrt{\theta_0}} \right) -$$

логарифмически выпуклая в новых переменных θ, θ_0 .

Пример 5. Пусть $f(x) = x^n$, n – четное, тогда решение задачи Коши выражается через полиномы Эрмита [8] по формуле

$$u(x, t) = (i\sqrt{2t})^n H_n\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} y^n dy.$$

Тогда получим, что функция

$$v = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{\frac{3}{2}n} \theta_0^2} \exp(\theta_0^2 + \theta_1^2) i^n H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{i} \theta_1\right) -$$

логарифмически выпуклая переменных θ_0, θ_1 . Заметим, что функция v действительная, а постоянный множитель можно игнорировать.

Заключение

Найдены формулы для информационной матрицы важных рандомизированных распределений. Использование рандомизированных плотностей позволило установить новые свойства преобразований Лапласа и Меллина, предложить новое доказательство логарифмической выпуклости гамма-функции и установить логарифмическую выпуклость бесселевых функций мнимого аргумента.

Можно предположить, что предложенные методы будут полезны в теории гипергеометрических функций, в теории интегральных преобразований с неотрицательными ядрами, а также в теории уравнений в частных производных.

Выражение для информационной матрицы, полученное в работе, открывает возможность применения методов информационной геометрии в теории интегральных преобразований и, наоборот, открывается возможность применения методов теории интегральных преобразований в математической статистике [9, 10].

Библиографический список

1. **Баврин, И. И.** Статистические структуры, порождаемые рандомизированными плотностями распределения / И. И. Баврин, В. И. Паньженский, О. Э. Яремко // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16, № 4. – С. 28–40.
2. **Рао, С. Р.** Линейные статистические методы и их применения / С. Р. Рао. – Москва : Наука, 1968. – 548 с.
3. **Barndorff, N. O.** Information and exponential families in statistical theory. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics / O. N. Barndorff. – Chichester : John Wiley & Sons, 1978. – 238 p.
4. **Brychkov, Y. A.** Integral Transforms of Generalized Functions, Chapter 5 / Y. A. Brychkov, A. P. Prudnikov. – New York-London, CRC Press, 1989. – 342 p.
5. **Ahmed, I. Z.** Handbook of Function and Generalized Function Transformations, Chapter 18 / I. Z. Ahmed. – Taylor & Francis, CRC Press, 1996. – 672 p.
6. **Феллер, В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. / В. Феллер. – Москва : Мир, 1984. – Т. 1. – 511 с.
7. **Podlubny, I.** Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications, Mathematics in Science and Engineering / I. Podlubny. – Academic Press, 1998. – 340 p.

8. **Bilodeau, G. G.** The Weierstrass Transform and Hermite Polynomials / G. G. Bilodeau // University of North Carolina, Duke Mathematical Journal. – 1962. – Vol. 129. – P. 293–308.
9. **Carslaw, H. S.** Conduction of Heat in Solids / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. – 2nd ed. – Oxford : Oxford University Press, 1959. – 510 p.
10. **Courant, R.** Methods of Mathematical Physics, vol. II / R. Courant, D. Hilbert. – New York, Inter science (Wiley), 1962. – 575 p.

References

1. Bavrin I. I., Pan'zhenskiy V. I., Yaremko O. E. *Chebyshevskiy sbornik* [Peer-reviewed theoretical journal Chebyshevskii Sbornik]. 2015, vol. 16, no. 4, pp. 28–40. [In Russian]
2. Rao S. R. *Lineynye statisticheskie metody i ikh primeneniya* [Linear statistical methods and their applications]. Moscow: Nauka, 1968, 548 p. [In Russian]
3. Barndorff N. O. *Information and exponential families in statistical theory. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*. Chichester: John Wiley & Sons, 1978, 238 p.
4. Brychkov Y. A., Prudnikov A. P. *Integral Transforms of Generalized Functions, Chapter 5*. New York-London, CRC Press, 1989, 342 p.
5. Ahmed I. Z. *Handbook of Function and Generalized Function Transformations, Chapter 18*. Taylor & Francis, CRC Press, 1996, 672 p.
6. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya: v 2 t.* [Introduction to probability theory and its applications: in 2 volumes]. Moscow: Mir, 1984, vol. 1, 511 p. [In Russian]
7. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications, Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1998, 340 p.
8. Bilodeau G. G. *University of North Carolina, Duke Mathematical Journal*. 1962, vol. 129, pp. 293–308.
9. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 1959, 510 p.
10. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics, vol. II*. New York, Inter science (Wiley), 1962, 575 p.

Яремко Олег Эмануилович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра компьютерных
технологий, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: yaremki@mail.ru

Yaremko Oleg Emanuilovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of computer technologies, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Яремко Наталия Николаевна

доктор педагогических наук, профессор,
кафедра математического образования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: yaremki@yandex.ru

Yaremko Nataliya Nikolaevna

Doctor of pedagogical sciences, professor,
sub-department of mathematical education,
Penza State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

Могилева Елена Сергеевнааспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: elenasergivan@yandex.ru

Mogileva Elena SergeevnaPostgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Образец цитирования:

Яремко, О. Э. Логарифмическая выпуклость изображений в теории интегральных преобразований / О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко, Е. С. Могилева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 13–23. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-2.

КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ С НЕРАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Интегральные преобразования функций нескольких переменных – активно развивающееся направление математического анализа. Многочисленные применения метода интегральных преобразований для решения уравнений математической физики при обработке сигналов в технике требуют совершенствования теоретического аппарата интегральных преобразований. В статье предлагается отступить от концепции симметричных интегральных преобразований, т.е. таких, в которых обратное преобразование имеет эрмитово сопряженное ядро к ядру прямого преобразования. В статье найдено разложение функции двух переменных для интеграла Фурье с группировкой гармоник по спектрам на концентрических окружностях. Аналогичная идея реализована в статье для теории кратных рядов Фурье, когда частоты гармоник группируются по границе квадрата или ромба.

Материалы и методы. Представлен вывод интегральных преобразований с неразделенными переменными на основе теоремы разложения. При этом вычисление интегралов по спектральным параметрам осуществляется переходом к полярной системе координат или к ее обобщению. В таком случае интеграл по многообразию размерности $(n - 1)$ удастся вычислить аналитически. Таким образом, в формуле обращения остается один интеграл по полярной оси.

Результаты. Сконструированы формулы обращения кратного интеграла Фурье. Их особенность состоит в том, что интегрирование ведется по полярной оси, тогда как в классической формуле обращения интегрирование ведется по многообразию размерности n . Аналогично, в теории кратных рядов Фурье получено разложение в ряд, в котором гармоники сгруппированы определенным образом и затем просуммированы в замкнутом виде. В статье предложены различные способы группировки гармонических компонент кратного ряда Фурье, что позволило получить новые формулы обращения.

Выводы. Доказаны новые формулы обращения кратного ряда Фурье и кратного интеграла Фурье; эти формулы могут быть использованы при выводе дискретных аналогов кратных интегралов Фурье с целью их применения при обработке 2D- и 3D-сигналов.

Ключевые слова: кратные интегралы Фурье, кратные ряды Фурье, формула разложения.

О. Е. Yaremko, N. N. Yaremko, E. S. Mogileva

MULTIPLE FOURIER SERIES AND FOURIER INTEGRALS WITH NON-SEPARABLE VARIABLES

© Яремко О. Э., Яремко Н. Н., Могилева Е. С., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Abstract.

Background. Integral transforms for functions of several variables are an actively developing area of mathematical analysis. Numerous applications in integral transforms method for solving equations of mathematical physics, in signal processing of engineering require improvement of the theoretical apparatus of integral transforms. The article proposes to depart from the concept of symmetric integral transforms, the inverse transform of which has a Hermitian conjugate kernel to the kernel of the direct transform. In this paper, we find a decomposition of a function of two variables for the Fourier integral with a grouping of harmonics by spectra on concentric circles. A similar idea is implemented in the article for the theory of multiple Fourier series, when the harmonic frequencies are grouped along the border of a square or rhombus.

Materials and methods. The paper presents the proof of integral transforms with non-separable variables based on the decomposition theorem. In this case, the calculation of integrals with respect to spectral parameters is carried out by carried out to the polar coordinate system or to its generalization. In this case, the integral of $(n - 1)$ -dimension can be calculated analytically and it leaves one integral on the polar axis in the reversal formula.

Results. Formulas for inversion of the multiple Fourier integral are constructed. Their peculiarity is that integration is carried out along the polar axis, whereas in the classical inversion formula integration is carried out along n - dimensions manifold. Similarly, in the theory of multiple Fourier series, a series expansion is obtained in harmonics are grouped in a certain way and then summed in a closed form. The article suggests various ways of grouping the harmonic components of a multiple Fourier series, which allowed us to obtain new formulas for inversion.

Conclusions. New inversion formulas for the multiple Fourier series and the multiple Fourier integrals are proved. These formulas can be used in the obtaining of discrete analogs of multiple Fourier integrals for the purpose of their application in the processing of 2D- and 3D-signals.

Keywords: multiple Fourier integrals, multiple Fourier series, decomposition formula.

Введение

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ с областью определения R^2 справедлива формула разложения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1 x_1} \times \\ \times e^{ik_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 \xi_1} e^{-ik_2 \xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) dk_1 dk_2. \quad (1)$$

На основании формулы разложения (1) можно определить прямое преобразование Фурье по формулам:

– прямое:

$$\Phi(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 \xi_1} e^{-ik_2 \xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2; \quad (2)$$

– обратное:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \Phi(k_1, k_2) dk_1 dk_2. \quad (3)$$

Обоснование формул можно найти в современных обзорах по кратным интегралам и рядам Фурье [1–3]. Многочисленные применения интегралов и рядов Фурье находим в [4, 5].

1. Разложение функции двух переменных с группировкой гармоник по спектрам на концентрических окружностях

Перейдем к полярной системе координат в формуле разложения (1):

$$k_1 = r \cos \varphi, k_2 = r \sin \varphi, r \in [0, \infty), \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Рассмотрим правую часть формулы (1):

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 \xi_1} e^{-ik_2 \xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) dk_1 dk_2.$$

Перейдем к полярной системе координат $dk_1 dk_2 = r dr d\varphi$. Значит,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_{++}^2} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 \xi_1} e^{-ik_2 \xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) dk_1 dk_2 = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{ir \cos \varphi x_1} e^{ir \sin \varphi x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir \xi_1 \cos \varphi} e^{-ir \xi_2 \sin \varphi} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Положим также

$$x_1 - \xi_1 = \rho \cos \psi, \quad x_2 - \xi_2 = \rho \sin \psi, \quad \rho \in [0, \infty), \quad \psi \in [-\pi, \pi],$$

$$\rho = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Считая возможным перестановку интегралов, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^\pi e^{ir \rho \cos \varphi \cos \psi} e^{ir \rho \sin \varphi \sin \psi} d\varphi \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^\pi e^{ir \rho \cos(\varphi - \psi)} d\varphi f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr. \end{aligned}$$

Заметим, что формула для функции Бесселя нулевого порядка [5] позволяет переписать внутренний интеграл в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\rho \cos(\varphi-\psi)} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{ir\rho \cos \sigma} d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\rho \sin \sigma} d\sigma = 2\pi J_0(r\rho).$$

В итоге установим теорему разложения:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0\left(r\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}\right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr. \quad (4)$$

Формула (4) представляет разложение функции двух переменных по сферически средним [6, 7]. На основании формулы (4) прямое преобразование Фурье с неразделенными переменными определим формулой

$$F(r, x_1, x_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0\left(r\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}\right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5)$$

Тогда формула обращения имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(r, x_1, x_2) dr.$$

Иной способ вывода формул (4), (5) предложен одним из авторов в работе [8]. Похожий подход в изучении кратных интегралов и рядов Фурье применялся в работах [9–11].

2. Формула обращения интеграла Фурье с группировкой гармоник по спектрам на гомотетичных ромбах

С помощью прямых $y = x, y = -x$ разобьем область интегрирования на четыре части $R^2 = R_1^2 \cup R_2^2 \cup R_3^2 \cup R_4^2$: R_1^2 – область, содержащая точку $(1, 0)$; R_2^2 – область, содержащая точку $(0, 1)$; R_3^2 – область, содержащая точку $(-1, 0)$; R_4^2 – область, содержащая точку $(0, -1)$.

В каждом из возникших четырех интегралов выполним замену переменных:

$$k_1 = r(1 - \tau), k_2 = r\tau.$$

Для примера возьмем область R_{++}^2 . Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_{++}^2} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-ik_1 \xi_1} e^{-ik_2 \xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) dk_1 dk_2.$$

Тогда $dk_1 dk_2 = r dr d\tau$ и, значит,

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_{++}^2} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \left(\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-ik_1 \xi_1} e^{-ik_2 \xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) dk_1 dk_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 e^{ir(1-\tau)x_1} e^{ir\tau x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir(1-\tau)\xi_1} e^{-ir\tau\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) r dr d\tau.$$

Считая возможным перестановку интегралов, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e^{ir(1-\tau)(x_1-\xi_1)} e^{ir\tau(x_2-\xi_2)} d\tau \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ir(x_2-\xi_2)} - e^{ir(x_1-\xi_1)}}{ir((x_2-\xi_2)-(x_1-\xi_1))} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются другие три интеграла. Как итог, получаем теорему разложения по гармоникам, группированным на границе ромба:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ir(x_2-\xi_2)} - e^{ir(x_1-\xi_1)}}{i((x_2-\xi_2)-(x_1-\xi_1))} + \frac{e^{-ir(x_2-\xi_2)} - e^{-ir(x_1-\xi_1)}}{ir(-(x_2-\xi_2)-(x_1-\xi_1))} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{ir(x_2-\xi_2)} - e^{-ir(x_1-\xi_1)}}{ir((x_2-\xi_2)+(x_1-\xi_1))} + \frac{e^{-ir(x_2-\xi_2)} - e^{-ir(x_1-\xi_1)}}{ir(-(x_2-\xi_2)+(x_1-\xi_1))} \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr. \end{aligned}$$

Переход к действительной части дает теорему разложения:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 \int_{R^2} \left(\frac{\sin r(x_2-\xi_2) - \sin r(x_1-\xi_1)}{(x_2-\xi_2)-(x_1-\xi_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin r(x_2-\xi_2) + \sin r(x_1-\xi_1)}{(x_2-\xi_2)+(x_1-\xi_1)} \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr. \end{aligned}$$

Прямое преобразование Фурье определим формулой:

$$\begin{aligned} F(r, x_1, x_2) = & \int_{R^2} \left(\frac{\sin r(x_2-\xi_2) - \sin r(x_1-\xi_1)}{(x_2-\xi_2)-(x_1-\xi_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin r(x_2-\xi_2) + \sin r(x_1-\xi_1)}{(x_2-\xi_2)+(x_1-\xi_1)} \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Тогда формула обращения имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} F(r, x_1, x_2) dr.$$

Замечание. Будем предполагать, что спектральная функция из формулы (2) имеет вид $\Phi(k_1, k_2) = \tilde{f}(|k_1| + |k_2|)$. Это значит, что спектральная функция постоянна на границе ромба $|k_1| + |k_2| = r$. Тогда в интегральном разложе-

нии возможно разделение переменных. Для доказательства нужно повторить проведенные выше рассуждения. В итоге получим новую формулу обращения двойного интеграла Фурье:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin rx_2 - \sin rx_1}{x_2 - x_1} + \frac{\sin rx_2 + \sin rx_1}{x_2 + x_1} \right) \tilde{f}(r) dr,$$

где $\Phi(k_1, k_2) = \tilde{f}(|k_1| + |k_2|)$.

3. Формула обращения интеграла Фурье с группировкой гармоник по спектрам на гомотетичных квадратах

С помощью прямых $x=r, x=-r, y=r, y=-r$ разобьем область интегрирования на четыре части $R^2 = R_{++}^2 \cup R_{+-}^2 \cup R_{-+}^2 \cup R_{--}^2$. Здесь, например, R_{++}^2 – отрезок прямой $x=r$. В каждом из четырех интегралов выполним замену переменных

$$k_1 = \pm r, k_2 = \pm r\tau, \tau \in [-1, 1],$$

где знаки выбираются в соответствии с обозначением стороны квадрата. Для области R_{++}^2 рассмотрим правую часть формулы разложения (1):

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_1^2} e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1\xi_1} e^{-ik_2\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) dk_1 dk_2.$$

Тогда формула замены в двойном интеграле дает равенство $dk_1 dk_2 = r dr d\tau$, значит,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R_{++}^2} e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1\xi_1} e^{-ik_2\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) dk_1 dk_2 = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{irx_1} e^{ir\tau x_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir\xi_1} e^{-ir\tau\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) r dr d\tau. \end{aligned}$$

Считая возможным перестановку интегралов, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 e^{ir(x_1-\xi_1)} e^{ir\tau(x_2-\xi_2)} d\tau \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ir(x_1-\xi_1)} \frac{e^{ir(x_2-\xi_2)} - e^{-ir(x_2-\xi_2)}}{ir(x_2-\xi_2)} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются оставшиеся три интеграла. Как итог, имеем формулу обращения:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(e^{ir(x_1-\xi_1)} \frac{e^{ir(x_2-\xi_2)} - e^{-ir(x_2-\xi_2)}}{ir(x_2-\xi_2)} + \right. \\ \left. + e^{-ir(x_1-\xi_1)} \frac{e^{ir(x_2-\xi_2)} - e^{-ir(x_2-\xi_2)}}{ir(x_2-\xi_2)} + e^{ir(x_2-\xi_2)} \frac{e^{ir(x_1-\xi_1)} - e^{-ir(x_1-\xi_1)}}{ir(x_1-\xi_1)} + \right. \\ \left. + e^{ir(x_2-\xi_2)} \frac{e^{ir(x_1-\xi_1)} - e^{-ir(x_1-\xi_1)}}{ir(x_1-\xi_1)} \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr.$$

Переход к действительной части дает итоговую формулу:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\cos r(x_1-\xi_1) \frac{\sin r(x_2-\xi_2)}{(x_2-\xi_2)} + \cos r(x_2-\xi_2) \frac{\sin r(x_1-\xi_1)}{(x_1-\xi_1)} \right) \times \\ \times f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dr.$$

Примем обозначение

$$F(r, x_1, x_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\cos r(x_1-\xi_1) \frac{\sin r(x_2-\xi_2)}{(x_2-\xi_2)} + \right. \\ \left. + \cos r(x_2-\xi_2) \frac{\sin r(x_1-\xi_1)}{(x_1-\xi_1)} \right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Тогда формула обращения двойного преобразования Фурье преобразуется к виду

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty F(r, x_1, x_2) dr.$$

Замечание. Если спектральная функция имеет вид $\Phi(k_1, k_2) = \tilde{f}(\|k\|)$, $\|k\| = \max\{|k_1|, |k_2|\}$, т.е. спектральная функция постоянна на границе квадрата $\|k\| = r$, то в интегральном разложении возможно разделение переменных. Для вывода формул повторим рассуждения, проведенные выше. В итоге получим формулу обращения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\cos rx_1 \frac{\sin rx_2}{x_2} + \cos rx_2 \frac{\sin rx_1}{x_1} \right) \tilde{f}(r) dr,$$

где

$$\Phi(k_1, k_2) \equiv \tilde{f}(\|k\|) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-ik_1\xi_1} e^{-ik_2\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

4. Кратные ряды Фурье с группировкой гармоник по спектрам на гомотетичных ромбах

Пусть функция $y = f(x_1, x_2)$ определена в квадрате $(x_1, x_2) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ и ее разложение в двойной ряд Фурье имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2} f_{k_1, k_2},$$

где f_{k_1, k_2} – коэффициенты ряда Фурье:

$$f_{k_1, k_2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_1\xi_1} e^{ik_2\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Перепишем формулу обращения в следующем виде:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k_1|+|k_2|=l} e^{ik_1(x_1-\xi_1)} e^{ik_2(x_2-\xi_2)} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Сгруппируем частоты по границе ромба $|k_1| + |k_2| = l$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{|k_1|+|k_2|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} &= \sum_{n_1+n_2=l} e^{-in_1(x_1-\xi_1)} e^{-in_2(x_2-\xi_2)} + \\ &+ \sum_{n_1+n_2=l} e^{-in_1(x_1-\xi_1)} e^{in_2(x_2-\xi_2)} + \sum_{n_1+n_2=l} e^{in_1(x_1-\xi_1)} e^{-in_2(x_2-\xi_2)} + \\ &+ \sum_{n_1+n_2=l} e^{in_1(x_1-\xi_1)} e^{in_2(x_2-\xi_2)} - e^{-il(x_1-\xi_1)} - e^{il(x_1-\xi_1)} - \\ &- e^{-il(x_2-\xi_2)} - e^{il(x_2-\xi_2)}; \quad l \geq 1, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Применим формулу для конечной геометрической прогрессии и в итоге получим

$$\begin{aligned} \sum_{|k_1|+|k_2|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} &= \frac{e^{-i(l+1)(x_1-\xi_1)} - e^{-i(l+1)(x_2-\xi_2)}}{e^{-i(x_1-\xi_1)} - e^{-i(x_2-\xi_2)}} + \\ &+ \frac{e^{-i(l+1)(x_1-\xi_1)} - e^{i(l+1)(x_2-\xi_2)}}{e^{-i(x_1-\xi_1)} - e^{-i(x_2-\xi_2)}} + \frac{e^{i(l+1)(x_1-\xi_1)} - e^{-i(l+1)(x_2-\xi_2)}}{e^{i(x_1-\xi_1)} - e^{-i(x_2-\xi_2)}} + \\ &+ \frac{e^{i(l+1)(x_1-\xi_1)} - e^{i(l+1)(x_2-\xi_2)}}{e^{-i(x_1-\xi_1)} - e^{-i(x_2-\xi_2)}} - 2\cos l(x_1 - \xi_1) - 2\cos l(x_2 - \xi_2); \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Упрощая, получим

$$\sum_{|k_1|+|k_2|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} = 2 \operatorname{Re} \frac{e^{-i(l+1)(x_1-\xi_1)} - e^{-i(l+1)(x_2-\xi_2)}}{e^{-i(x_1-\xi_1)} - e^{-i(x_2-\xi_2)}} +$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \frac{e^{-i(l+1)(x_1-\xi_1)} - e^{i(l+1)(x_2-\xi_2)}}{e^{-i(x_1-\xi_1)} - e^{-i(x_2-\xi_2)}} - 2 \cos l(x_1 - \xi_1) - 2 \cos l(x_2 - \xi_2);$$

$$n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Вычислим действительные части в полученной формуле:

$$\sum_{|k_1|+|k_2|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} = 2 \cos \frac{(x_1 - \xi_1) + (x_2 - \xi_2)}{2} \times$$

$$\times \frac{\sin(l+1) \frac{(x_1 - \xi_1) - (x_2 - \xi_2)}{2}}{\sin \frac{(x_1 - \xi_1) - (x_2 - \xi_2)}{2}} + 2 \cos \frac{(x_1 - \xi_1) - (x_2 - \xi_2)}{2} \times$$

$$\times \frac{\sin(l+1) \frac{(x_1 - \xi_1) + (x_2 - \xi_2)}{2}}{\sin \frac{(x_1 - \xi_1) + (x_2 - \xi_2)}{2}} - 2 \cos l(x_1 - \xi_1) - 2 \cos l(x_2 - \xi_2).$$

Примем обозначение

$$G(l, x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = 2 \cos \frac{(x_1 - \xi_1) + (x_2 - \xi_2)}{2} \times$$

$$\times \frac{\sin(l+1) \frac{(x_1 - \xi_1) - (x_2 - \xi_2)}{2}}{\sin \frac{(x_1 - \xi_1) - (x_2 - \xi_2)}{2}} + 2 \cos \frac{(x_1 - \xi_1) - (x_2 - \xi_2)}{2} \times$$

$$\times \frac{\sin(l+1) \frac{(x_1 - \xi_1) + (x_2 - \xi_2)}{2}}{\sin \frac{(x_1 - \xi_1) + (x_2 - \xi_2)}{2}} - 2 \cos l(x_1 - \xi_1) - 2 \cos l(x_2 - \xi_2) + 1.$$

Тогда получим интегральное представление для $f(x_1, x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x_1, x_2),$$

где

$$f_l(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(l, x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

В итоге получено разложение функции $y = f(x_1, x_2)$ в ряд Фурье с неразделенными переменными. В таком ряде частоты группируются по границе ромба $|k_1| + |k_2| = l$.

Замечание. Пусть коэффициенты Фурье $f_{k_1, k_2} = \tilde{f}_{|k_1|+|k_2|}$ постоянны на границе ромба $|k_1| + |k_2| = l$, тогда переменные в ряде Фурье разделяются: справедлива формула разложения:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{\infty} G(l, x_1, x_2) \tilde{f}_l,$$

в которой коэффициенты вычисляются по формуле

$$\tilde{f}_l = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_1\xi_1} e^{ik_2\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

5. Кратные ряды Фурье с группировкой гармоник по спектрам на гомотетичных квадратах

Перепишем формулу для кратного ряда Фурье в виде

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\|k\|=l} e^{ik_1(x_1-\xi_1)} e^{ik_2(x_2-\xi_2)} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\|k\| = \max\{|k_1|, |k_2|\}.$$

Вычислим внутреннюю сумму

$$\begin{aligned} \sum_{\|k\|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} &= \sum_{k_2=-l}^{l-1} e^{-il(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} + \\ &+ \sum_{k_2=-l}^{l-1} e^{il(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} + \sum_{k_1=-l}^{l-1} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{il(x_2-\xi_2)} + \\ &+ \sum_{k_1=l}^{l-1} e^{ik_1(x_1-\xi_1)} e^{il(x_2-\xi_2)}; \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Применим формулу для конечной геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \sum_{\|k\|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} &= \\ &= e^{-il(x_1-\xi_1)} \frac{e^{il(x_2-\xi_2)} - e^{-il(x_2-\xi_2)}}{1 - e^{-i(x_2-\xi_2)}} + e^{il(x_1-\xi_1)} \frac{e^{-il(x_2-\xi_2)} - e^{il(x_2-\xi_2)}}{1 - e^{i(x_2-\xi_2)}} + \end{aligned}$$

$$+e^{-il(x_2-\xi_2)} \frac{e^{il(x_1-\xi_1)} - e^{-il(x_1-\xi_1)}}{1 - e^{-i(x_1-\xi_1)}} + e^{il(x_2-\xi_2)} \frac{e^{-il(x_1-\xi_1)} - e^{il(x_1-\xi_1)}}{1 - e^{i(x_1-\xi_1)}}.$$

Упрощая, получим

$$\sum_{\|k\|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} = \operatorname{Re} \left(e^{-il(x_1-\xi_1)} \frac{e^{il(x_2-\xi_2)} - e^{-il(x_2-\xi_2)}}{1 - e^{-i(x_2-\xi_2)}} \right) + \\ + \operatorname{Re} \left(e^{-il(x_2-\xi_2)} \frac{e^{il(x_1-\xi_1)} - e^{-il(x_1-\xi_1)}}{1 - e^{-i(x_1-\xi_1)}} \right).$$

Вычислим действительные части в полученной формуле, тогда

$$\sum_{\|k\|=l} e^{-ik_1(x_1-\xi_1)} e^{-ik_2(x_2-\xi_2)} = \sin l(x_1-\xi_1) \frac{\cos \left(l(x_2-\xi_2) + \frac{x_1-\xi_1}{2} \right)}{\sin \frac{x_1-\xi_1}{2}} + \\ + \sin l(x_2-\xi_2) \frac{\cos \left(l(x_1-\xi_1) + \frac{x_2-\xi_2}{2} \right)}{\sin \frac{x_2-\xi_2}{2}}.$$

Примем обозначение

$$G(l, x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) = \sin l(x_1-\xi_1) \frac{\cos \left(l(x_2-\xi_2) + \frac{x_1-\xi_1}{2} \right)}{\sin \frac{x_1-\xi_1}{2}} + \\ + \sin l(x_2-\xi_2) \frac{\cos \left(l(x_1-\xi_1) + \frac{x_2-\xi_2}{2} \right)}{\sin \frac{x_2-\xi_2}{2}}.$$

Тогда получим разложение функции $y = f(x_1, x_2)$ в ряд Фурье с частотами, группированными по границе квадрата

$$f(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) + \sum_{l=1}^{\infty} f_l(x_1, x_2).$$

При этом члены ряда вычисляются по формулам

$$f_l(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(l, x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$f_0(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

В итоге получено разложение функции $y = f(x_1, x_2)$ в ряд Фурье с неразделенными переменными. В таком ряде частоты группируются по границе квадрата $\|k\| = l$.

Замечание. Пусть коэффициенты Фурье $f_{k_1, k_2} = \tilde{f}_{\|k\|}$ постоянны на границе квадрата $\|k\| = l$, тогда переменные в ряде Фурье разделяются, т.е. разложение ведется по гармоникам с частотами, группированными по сторонам квадрата

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{\infty} G(l, x_1, x_2) \tilde{f}_l$$

с коэффициентами, вычисляемыми по обычным формулам:

$$\tilde{f}_l = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_1\xi_1} e^{ik_2\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Библиографический список

1. **Голубов, Б. И.** Кратные ряды и интегралы Фурье / Б. И. Голубов // Итоги науки и техники. Сер.: Математический анализ. – 1982. – Т. 19. – С. 3–54.
2. **Алимов, Ш. А.** Кратные ряды и интегралы Фурье. Коммутативный гармонический анализ / Ш. А. Алимов, Р. Р. Ашуров, А. К. Пулатов // Итоги науки и техники. Сер.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1989. – Т. 42. – С. 7–104.
3. **Янушаускас, А. И.** Кратные ряды Фурье / А. И. Янушаускас. – Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1986. – 272 с.
4. **Снеддон, И.** Преобразование Фурье / И. Снеддон. – Москва : Иностранная литература, 1955. – 668 с.
5. **Бейтмен, Г.** Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Москва : Наука, 1974. – Т. 2. – 296 с.
6. **Попов, Д. А.** О сферической сходимости интеграла Фурье индикатора N -мерной области / Д. А. Попов // Математический сборник. – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 145–157.
7. **Голубов, Б. И.** О сходимости сферических средних Рисса кратных рядов Фурье / Б. И. Голубов // Математический сборник. – 1975. – Т. 96, № 2. – С. 1254–1278.
8. **Баврин, И. И.** Интегральные преобразования Фурье на компактах из $\mathbb{R}^n$ и их приложения к проблеме моментов / И. И. Баврин, О. Э. Яремко // Доклады РАН. – 2000. – Т. 374, № 2. – С. 154–156.
9. **Дьяченко, М. И.** Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов / М. И. Дьяченко // Успехи математических наук. – 1992. – Т. 47, № 5. – С. 97–162.
10. **Левитан, Б. М.** О суммировании кратных рядов и интегралов Фурье / Б. М. Левитан // Доклады АН СССР. – 1955. – Т. 102, № 6. – С. 1073–1076.
11. **Бахбих, М.** О достаточных условиях сходимости двойных рядов по прямоугольникам / М. Бахбих // Математические заметки. – 1974. – Т. 15, № 6. – С. 835–838.

References

1. Golubov B. I. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Matematicheskiy analiz* [Results of science and technology. Series: Mathematical analysis]. 1982, vol. 19, pp. 3–54. [In Russian]
2. Alimov Sh. A., Ashurov R. R., Pulatov A. K. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [Results of science and technology. Series: Modern mathematical issues. Fundamental directions]. 1989, vol. 42, pp. 7–104. [In Russian]
3. Yanushauskas A. I. *Kratnye ryady Fur'e* [Multiple Fourier series]. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otделение, 1986, 272 p. [In Russian]
4. Sneddon I. *Preobrazovanie Fur'e* [Fourier transform]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1955, 668 p. [In Russian]
5. Beytmen G., Erdeyi A. *Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny* [Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka, 1974, vol. 2, 296 p. [In Russian]
6. Popov D. A. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection]. 1998, vol. 189, no. 7, pp. 145–157. [In Russian]
7. Golubov B. I. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection]. 1975, vol. 96, no. 2, pp. 1254–1278. [In Russian]
8. Bavrin I. I., Yaremko O. E. *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences]. 2000, vol. 374, no. 2, pp. 154–156. [In Russian]
9. D'yachenko M. I. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1992, vol. 47, no. 5, pp. 97–162. [In Russian]
10. Levitan B. M. *Doklady AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of USSR]. 1955, vol. 102, no. 6, pp. 1073–1076. [In Russian]
11. Bakhbikh M. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1974, vol. 15, no. 6, pp. 835–838. [In Russian]

Яремко Олег Эмануилович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра компьютерных
технологий, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: yaremki@mail.ru

Yaremko Oleg Emanuilovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of computer technologies, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Яремко Наталия Николаевна

доктор педагогических наук, профессор,
кафедра математического образования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: yaremki@yandex.ru

Yaremko Nataliya Nikolaevna

Doctor of pedagogical sciences, professor,
sub-department of mathematical education,
Penza State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

Могилева Елена Сергеевна

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: elenasergivan@yandex.ru

Mogileva Elena Sergeevna

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Образец цитирования:

Яремко, О. Э. Кратные ряды Фурье и интегралы Фурье с неразделяющимися переменными / О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко, Е. С. Могилева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 24–37. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-3.

ОБ ОСОБЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КЛЕРО В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация.

Актуальность и цели. Для обыкновенного дифференциального уравнения Клеро нахождение общего решения не представляет особого труда и подробно описано в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме общего решения, представляющего собой семейство линейных функций, для обыкновенного дифференциального уравнения Клеро могут существовать особые (сингулярные) решения, для нахождения которых не существует общих методов. В особенности это касается уравнений Клеро в частных производных. О чем свидетельствует весьма скудный перечень в доступной научной литературе типов уравнений Клеро, для которых особые решения могут быть явно построены. В этом случае представляется актуальной задача поиска особых решений уравнений Клеро. Целью данной работы является поиск и исследование особых решений уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, а также установление связи между особыми решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Результаты. Приведены основные понятия и решение уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Кроме того, выдвинуто предположение о наличии связи между сингулярными решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Выводы. Представлено, что в классе специальных зависимостей правых частей уравнения Клеро в теории уравнений в частных производных существует связь с особыми решениями уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Число таких решений определяется числом известных особых решений уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их всевозможными комбинациями.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, уравнения Клеро, особые решения.

L. A. Zhidova

ON SINGULAR SOLUTIONS OF CLAIRAUT EQUATIONS IN THE THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL AND PARTIAL DERIVATIVE EQUATIONS

Abstract.

Background. There is no problem in finding a general solution to the ordinary differential Clairaut equation. The corresponding procedure is described in details in

the theory of ordinary differential equations. Except of general solution being the family of linear functions, special (singular) solutions for the ordinary differential Clairaut equation may exist for which are no general methods to find them. This is evidenced by a very meager list in the accessible scientific literature of the types of Clairaut equations for which special solutions can be explicitly constructed. Therefore, it seems as an actual task finding and studies special solutions to the Clairaut equations. Goal of the present paper is finding and studies of special solutions to the Clairaut equations in the theory of ordinary differential equations and of partial differential equations and setting relations among special solutions to the Clairaut equation in the theory of ordinary differential equations and of partial differential equations.

Results. We discuss basic concepts and solutions to the Clairaut equations in the theory of ordinary differential equations and of partial differential equations. We find relations between singular solutions to the Clairaut equations in the theory of ordinary differential equations and of partial differential equations.

Conclusions. It is proved that there exists the relation between singular solutions to the Clairaut equations in the theory of ordinary differential equations and of partial differential equations in the class of special dependences of right hand side of the Clairaut in the theory of partial differential equations. The number of such relations is defined by the number of known special solutions to the Clairaut equations in the theory of ordinary differential equations and all their possible combinations.

Keywords: ordinary differential equations, partial derivative equations, Clairaut equations, singular solutions.

Введение

Предлагаемая статья посвящена изучению дифференциальных уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных и поиску их особых решений. Что касается описания общего решения уравнения Клеро, то здесь нет никаких принципиальных проблем – оно всегда описывается в терминах семейства линейных функций. Однако большой интерес представляют так называемые особые (сингулярные) решения, для нахождения которых не существует общих методов, и поиск таких решений всегда представляет собой некую изобретательность, поэтому привлекает внимание многих исследователей. Поиск особых решений для различного вида функций остается актуальной задачей, поскольку имеет большое практическое значение, в частности в квантовой теории калибровочных полей. Нами приведены основные понятия и решение уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Кроме того, высказано предположение о наличии связи между сингулярными решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, представлено подтверждение этого предположения, а именно в классе специальных зависимостей правых частей уравнения Клеро в теории уравнений в частных производных существует связь с особыми решениями уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения Клеро

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений уравнение Клеро

$$y - y'x = \psi(y') \quad (1)$$

принадлежит к классу уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Здесь $y = y(x)$ – неизвестная функция вещественной переменной x ; $\psi(z)$ представляет заданную функцию вещественной переменной z . Хорошо известно, что общее решение уравнения (1) представляет собой семейство линейных функций

$$y = Cx + \psi(C), \quad (2)$$

где C – произвольная вещественная константа.

Однако особый интерес в теории уравнений Клеро представляют особые (сингулярные) решения. Они возникают в тех случаях, когда уравнение

$$x + \psi'(z) = 0 \quad (3)$$

имеет вещественное решение, выражающее переменную z как функцию переменной x .

Тогда уравнение

$$y = xz(x) + \psi(z(x)) \quad (4)$$

представляет собой особое, или сингулярное, решение уравнения Клеро (1). Для их нахождения не существует общих методов, и поиск таких решений связан с известной изобретательностью и находчивостью. В особенности это касается уравнений Клеро в частных производных. Этим, в частности, объясняется весьма скудный перечень в доступной научной литературе типов уравнений Клеро, для которых особые решения могут быть явно построены [1, 2].

В свою очередь интерес к изучению особых решений уравнения Клеро связан с недавно обнаруженным фактом [3, 4] в квантовой теории калибровочных полей с составными операторами, выражающемся в том, что однопетлевое эффективное действие может быть выражено в терминах особых решений уравнения Клеро.

2. Уравнения типа Клеро в теории дифференциальных уравнений в частных производных

В теории дифференциальных уравнений в частных производных рассматриваются уравнения вида

$$y - y'_i x^i = \psi(y'_1, y'_2, \dots, y'_n), \quad (5)$$

где неизвестная функция y является функцией переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$, а $\psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ представляет собой заданную функцию переменных $z_1, z_2, \dots, z_n$, под повторяющимися индексами в левой части (5) подразумевается суммирование. Уравнения вида (5) известны в теории уравнений в частных производных так же, как уравнения типа Клеро [1].

Как и в случае уравнения Клеро (1), общее решение уравнения (5) описывается семейством линейных функций

$$y = C_i x^i + \Psi(C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (6)$$

где C_i , $(i = 1, 2, \dots, n)$ – произвольные вещественные постоянные. Если система следующих уравнений:

$$x^i + \frac{\partial \Psi(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

имеет вещественные решения, выражающие величины z_i как функции переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$, то уравнение (5) имеет особое (сингулярное) решение

$$y = x^i z_i(x) + \Psi(z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)), \quad (8)$$

где мы для краткости записи обозначили $z_i(x) = z_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В работах [5, 6] нами были изучены способы нахождения особых решений уравнений Клеро в теории уравнений в частных производных в классе специальных видов различных функций $\Psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

В связи с сингулярными решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных возникает естественный вопрос: А существует ли какая-либо связь между этими классами особых решений?

3. Установление связи особых решений уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных

В настоящей статье представлены результаты исследования по установлению связи между сингулярными (особыми) решениями уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Обратим внимание на систему n уравнений (7), предположив существование особых решений:

$$x_i + \frac{\partial \Psi}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$z_i(x) = z_i(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

$$y = \sum_i x^i z_i(x^1, \dots, x^n) + \Psi(z_1(x^1, \dots, x^n), z_2(x^1, \dots, x^n), \dots, z_n(x^1, \dots, x^n)).$$

Рассмотрим ситуацию, когда правая часть уравнения Клеро в теории дифференциальных уравнений в частных производных имеет специальный вид

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_n) = g_1(z_1) + g_2(z_2) + \dots + g_n(z_n), \quad (9)$$

откуда $\frac{\partial \psi}{\partial z_i} = \frac{\partial g_i(z_i)}{\partial z_i} = \frac{dg_i(z_i)}{dz_i}$.

Таким образом, имеем

$$x_i + \frac{dg_i(z_i)}{dz_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда система уравнений распадается на систему несвязных уравнений, которые уже рассматривались при интегрировании уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$z_i(x) = z_i(x^i),$$

$$y = \sum_i x^i z_i(x^i) + \psi(z_1(x^1), z_2(x^2), \dots, z_n(x^n)). \quad (10)$$

Заключение

Таким образом, впервые в известной нам литературе [7, 8] в классе специальных зависимостей правых частей уравнения Клеро в теории уравнений в частных производных найдена связь между особыми решениями в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и особыми решениями в теории уравнений Клеро в частных производных. Число таких решений определяется числом известных особых решений уравнения Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их всевозможными комбинациями.

Библиографический список

1. **Камке, Э.** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – Москва : Наука, 1966. – 260 с.
2. **Зайцев, В. Ф.** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – Москва : Физматлит, 2003. – 416 с.
3. **Lavrov, P. M.** Loop expansion of the average effective action in the functional renormalization group approach / P. M. Lavrov, B. S. Merzlikin // Physical Review. – 2015. – D 92. – P. 085038.
4. **Lavrov, P. M.** Legendre transformations and Clairaut-type equations / P. M. Lavrov, B. S. Merzlikin // Physics Letters. – 2016. – B 756. – P. 188–193.
5. **Жидова, Л. А.** Дифференциальное уравнение типа Клеро в частных производных со степенной функцией / Л. А. Жидова, Л. Л. Рыскина // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2019. – № 1. – С. 41–48.
6. **Рыскина, Л. Л.** Решение дифференциальных уравнений Клеро в частных производных с логарифмической функцией / Л. Л. Рыскина, Л. А. Жидова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 2. – С. 28–35.
7. **Курант, Р.** Уравнения с частными производными / Р. Курант. – Москва : Мир, 1964. – 830 с.
8. **Степанов, В. В.** Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – Москва : Физматлит, 1965. – 512 с.

References

1. Kamke E. *Spravochnik po differentsial'nykh uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [First order partial differential equations handbook]. Moscow: Nauka, 1966, 260 p. [In Russian]
2. Zaytsev V. F., Polyanin A. D. *Spravochnik po differentsial'nykh uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [First order partial differential equations handbook]. Moscow: Fizmatlit, 2003, 416 p. [In Russian]
3. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. *Physical Review*. 2015, D 92, p. 085038.
4. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. *Physics Letters*. 2016, B 756, pp. 188–193.
5. Zhidova L. A., Ryskina L. L. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika* [Bulletin of Buryat State University. Mathematics, informaticss]. 2019, no. 1, pp. 41–48. [In Russian]
6. Ryskina L. L., Zhidova L. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 2, pp. 28–35. [In Russian]
7. Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Equations with partial derivative]. Moscow: Mir, 1964, 830 p. [In Russian]
8. Stepanov V. V. *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course of the differential equations]. Moscow: Fizmatlit, 1965, 512 p. [In Russian]

Жидова Любовь Александровна

кандидат педагогических наук, доцент,
кафедра математического анализа,
Томский государственный
педагогический университет (Россия,
г. Томск, ул. Киевская, 60)

E-mail: gidovala@yandex.ru

Zhidova Lyubov' Aleksandrovna

Candidate of pedagogical sciences,
associate professor, sub-department
of mathematical analysis, Tomsk State
Pedagogical University (60 Kiyevskaya
street, Tomsk, Russia)

Образец цитирования:

Жидова, Л. А. Об особых решениях уравнений Клеро в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных / Л. А. Жидова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 38–43. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-4.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОЛИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Аннотация.

Актуальность и цели. Работа посвящена исследованию множеств функций, в которых выполняется условие однозначной разрешимости вырожденных полисингулярных интегральных уравнений, и построению приближенных методов решения полисингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях. В настоящее время исследование многих разделов сингулярных интегральных уравнений можно считать в основном завершенным. Одними из исключений являются сингулярные и полисингулярные интегральные уравнения, обращающиеся в нуль на многообразиях с мерой, большей нуля. Построена теория сингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях, из которой следует, что вырожденные сингулярные интегральные уравнения имеют бесконечное число решений и для этих уравнений не справедливы первая и вторая теоремы Нетера. Для полисингулярных интегральных уравнений подобная теория еще не построена. Более того, конкретные алгоритмы и приближенные методы решения полисингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях отсутствуют. В связи с тем, что вырожденными полисингулярными интегральными уравнениями моделируются многие процессы в физике и технике, возникает необходимость в разработке приближенных методов их решения. Кроме того, так как в пространстве Гельдера и в пространстве функций, суммируемых в квадрате, вырожденные полисингулярные интегральные уравнения имеют бесконечное число решений, возникает актуальная задача выделения множеств единственности решений этих уравнений. Не менее актуальной является задача построения приближенных методов решения вырожденных полисингулярных интегральных уравнений.

Материалы и методы. Для выделения классов функций, в которых вырожденные полисингулярные интегральные уравнения имеют единственное решение, используются методы теории функций комплексной переменной, краевые задачи Римана и теория сингулярных интегральных уравнений. При построении приближенных методов используются итерационно-проекции методы.

Результаты. Построены классы функций, на которых решения вырожденных полисингулярных интегральных уравнений, если они существуют, определяются однозначно. В связи с этим предложена новая постановка задачи решения вырожденных полисингулярных интегральных уравнений. Предложены и обоснованы методы коллокации и механических квадратур решения, вырожденных полисингулярных интегральных уравнений на построенных классах функций.

Выводы. Предложенные результаты могут быть непосредственно использованы при решении многих задач физики и техники, в частности, в задачах

интегральной геометрии, аэродинамики, гидродинамики. Представляет интерес распространение этих результатов на вырожденные многомерные сингулярные интегральные уравнения.

Ключевые слова: полисингулярные интегральные уравнения, вырожденный символ, единственность, проекционно-итерационный метод.

I. V. Boykov, N. Yu. Kudryashova, A. A. Shaldaeva

AN APPROXIMATE METHODS FOR SOLVING POLYSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN DEGENERATE CASES

Abstract.

Background. This work is devoted to the study of sets of functions in which the condition of unique solvability of degenerate polysingular integral equations is satisfied, and to the construction of approximate methods for solving polysingular integral equations in degenerate cases. Nowadays, the study of many sections of singular integral equations can be considered largely completed. Some of the exceptions are singular and polysingular integral equations that vanish on manifolds with measure greater than zero. The theory of singular integral equations in degenerate cases is constructed, from which it follows that degenerate singular integral equations have an infinite number of solutions and for these equations the first and second Noether theorems are not valid. For polysingular integral equations, a similar theory has not yet been constructed. Moreover, there are no specific algorithms and approximate methods for solving polysingular integral equations in degenerate cases. Due to the fact that many processes in physics and technology are modeled by degenerate polysingular integral equations, it becomes necessary to develop approximate methods for their solution. In addition, since in the Hölder space and in the space of functions summable in a square, the degenerate polysingular integral equations have an infinite number of solutions, the actual problem of identifying the sets of uniqueness of solutions of these equations arises. The problem of constructing approximate methods for solving degenerate polysingular integral equations is no less urgent.

Materials and methods. To distinguish classes of functions in which degenerate polysingular integral equations have a unique solution, methods of the theory of functions of a complex variable, Riemann boundary value problems and the theory of singular integral equations are used. When constructing approximate methods, iterative-projection methods are used.

Results. Classes of functions are constructed on which solutions of degenerate polysingular integral equations, if they exist, are uniquely determined. In this regard, a new formulation of the problem of solving degenerate polysingular integral equations is proposed. Methods of collocation and mechanical quadratures for solving degenerate polysingular integral equations on the constructed classes of functions are proposed and substantiated.

Conclusions. The proposed results can be directly used in solving many problems of physics and technology, in particular, in problems of integral geometry, aerodynamics, hydrodynamics. It is of interest to extend these results to degenerate multidimensional singular integral equations.

Keywords: polysingular integral equations, degenerate symbol, uniqueness, projection-iterative method.

Полисингулярные интегральные уравнения, а также связанные с ними краевые задачи Римана в полицилиндрах, находят широкое применение в различных областях физики и техники.

Исследованию полисингулярных интегральных уравнений посвящены работы [1–6].

В меньшей степени разработаны приближенные методы решения краевой задачи Римана в полицилиндрических областях и полисингулярных интегральных уравнений [7].

При этом остались не исследованными многие вопросы, в том числе вопросы разрешимости полисингулярных интегральных уравнений (и краевой задаче Римана) в вырожденных случаях.

В данной работе исследуются вопросы однозначной разрешимости бисингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях. Построены и обоснованы сплайн-коллокационные методы решения бисингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях. Распространение полученных результатов на полисингулярные интегральные уравнения не представляет трудностей.

Рассмотрим бисингулярное интегральное уравнение

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2)S_1x + c(t_1, t_2)S_2x + d(t_1, t_2)S_{12}x + U(hx) = f(t_1, t_2), \quad (1)$$

где

$$S_1x = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1, \quad S_2x = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2,$$

$$S_{12}x = \frac{1}{(\pi i)^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{x(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2,$$

$$U(hx) = \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

γ_i – замкнутая гладкая кривая в плоскости z_i , $i = 1, 2$.

Для простоты изложения будем считать, что γ_i – единичная окружность с центром в начале координат в соответствующих плоскостях z_i , $i = 1, 2$.

Покажем, что уравнение вида (1) в вырожденных случаях имеет бесконечное число решений. Для простоты ограничимся рассмотрением уравнения

$$x(t_1, t_2) + \frac{1}{(\pi i)^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{x(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 = 0. \quad (2)$$

Известно [8], что если функция $x(t)$ аналитическая в области D^+ , то

$$x(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

А если функция $x(t)$ аналитическая в области D^- , то

$$\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau - x(\infty) = 0.$$

Кроме того, известно [8], что $S_1 S_2 = S_2 S_1 = S_{12}$.

Тогда, как не трудно видеть, функции $t_1^k t_2^l$, $k=1, 2, \dots$, $l=-1, -2, \dots$, являются решениями уравнения (2). Таким образом, уравнение (2) имеет счетное множество линейно-независимых решений.

Рассмотрим следующие двумерные бисингулярные интегральные уравнения:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = f(t_1, t_2) \quad (3)$$

и

$$\int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \left[\frac{1}{\tau_1 - t_1} + \frac{1}{\tau_2 - t_2} \right] x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2). \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) представляют интерес в связи с тем, что частный случай этих уравнений, а именно уравнения видов

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = f(t_1, t_2) \quad (5)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau_1 - t_1} + \frac{1}{\tau_2 - t_2} \right] x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2), \quad (6)$$

находят применение в интегральной геометрии, и М. М. Лаврентьев [9, 10] отметил важность их исследования.

Так как уравнения (3), (4) и (5), (6) исследуются по одной схеме, то естественно остановиться на более общих уравнениях (3), (4).

Покажем, что однородные уравнения, отвечающие уравнениям (3), (4), имеют счетное множество линейно-независимых решений.

Нетрудно видеть, что функции $t_1^k t_2^l$, $k=1, 2, \dots$, $l=-1, -2, \dots$, являются решениями однородного уравнения, отвечающего уравнению (3), а функции $-t_1^k t_2^l$, $k=1, 2, \dots$, $l=-1, -2, \dots$, являются решениями однородного уравнения, отвечающего уравнению (4).

В связи с этим возникают следующие задачи:

1) разработка эффективных методов решения уравнений вида (3), (4), гарантирующих сходимость к одному решению исходного уравнения;

2) определение классов функций, в которых уравнения (3), (4) однозначно разрешимы;

3) разработка приближенных методов решения уравнений (3), (4) в пространствах однозначной их разрешимости.

Так как уравнения (3), (4) имеют бесконечное число решений, то применение стандартных вычислительных методов линейной алгебры может оказаться неэффективным. Это связано с тем, что при каждом изменении размерности аппроксимирующей системы уравнений полученные решения могут входить в окрестности различных точных решений.

Более эффективным в данном случае является непрерывный метод решения операторных уравнений [11], так как для его реализации требуется устойчивость соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. Следовательно, метод будет сходиться к одному и тому же решению при возмущениях начальных условий, коэффициентов и правых частей.

В данной работе для решения вырожденных бисингулярных интегральных уравнений используется непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений [11], основанный на теории устойчивости Ляпунова.

Непрерывный метод решения операторных уравнений

Пусть $x(t)$ – решение векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (7)$$

которое определено для всех $t \geq t_0$. Решение $x(t)$ называется устойчивым – точнее, устойчивым на интервале $[t_0, \infty)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует соответствующее значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что любое решение $\tilde{x}(t)$, которое удовлетворяет неравенству $|\tilde{x}(t_0) - x(t_0)| < \delta$, существует и удовлетворяет неравенству $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

Решение называется асимптотически устойчивым, если всякий раз, когда $|\tilde{x}(t_0) - x(t_0)|$ достаточно мало, выполняется $|\tilde{x}(t) - x(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Мы используем следующие обозначения:

$$B(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| \leq r\}, \quad S(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| \leq r\},$$

$$\operatorname{Re}(K) = \Re(K) = (K + K^*) / 2, \quad \Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1) h^{-1}.$$

Здесь B – банахово пространство, $a \in B$, K – линейный и ограниченный оператор в B ; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма [12] оператора K ; K^* – сопряженный оператор к K ; I – тождественный оператор.

Логарифмическая норма известна в наиболее часто используемых пространствах. Мы ограничимся описанием трех норм.

Пусть $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, – вещественная матрица.

В n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ часто используются следующие нормы:

$$\text{– октоэдральная: } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

– кубическая: $\|x\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;

– сферическая (евклидова): $\|x\|_3 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Отметим, что логарифмическая норма одной и той же матрицы может быть положительной в одном пространстве и отрицательной в другом.

Приведем некоторые логарифмической нормы матрицы $A = \{a_{ij}\}$, ассоциированные с вышеуказанными нормами векторов:

– октоэдральная логарифмическая норма Λ_1 :

$$\Lambda_1(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left(a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right);$$

– кубическая логарифмическая норма Λ_2 :

$$\Lambda_2(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right);$$

– сферическая (евклидова) логарифмическая норма Λ_3 :

$$\Lambda_3(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^*}{2} \right),$$

где A^* – сопряженная матрица для A .

Логарифмическая норма обладает свойствами, полезными в численном анализе.

Пусть A, B – квадратные матрицы порядка n с комплексными элементами; $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ – n -мерные векторы с комплексными координатами. Рассмотрим следующие системы алгебраических уравнений: $Ax = \xi$ и $Bu = \eta$. Пусть норма вектора и соответствующая операторная норма матрицы зафиксированы, а логарифмическая норма $\Lambda(A)$ соответствует операторной норме.

Теорема 1 [13]. Если $\Lambda(A) < 0$, то матрица A не вырождена и $\|A^{-1}\| \leq 1/|\Lambda(A)|$.

Теорема 2 [13]. Пусть $Ax = \xi$, $Bu = \eta$ и $\Lambda(A) < 0$, $\Lambda(B) < 0$. Тогда

$$\|x - y\| \leq \frac{\|\xi - \eta\|}{|\Lambda(B)|} + \frac{\|A - B\|}{|\Lambda(A)\Lambda(B)|}.$$

Основные свойства логарифмической нормы приведены в [12].

Рассмотрим в банаховом пространстве B задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)), \quad (8)$$

$$x(0) = x_0. \quad (9)$$

Предположим, что нелинейный оператор A имеет производную Фреше и $A(0) = 0$.

Приведем достаточные условия устойчивого и асимптотически устойчивого решения задачи Коши (8), (9). Эти условия были получены в [14, 15].

Теорема 3. Пусть интеграл $\int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau)))d\tau$ неположительный (соответственно, отрицательный) и удовлетворяет неравенству

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau)))d\tau \leq -\alpha_\varphi, \quad \alpha_\varphi > 0,$$

для любой дифференцируемой кривой $\varphi(t)$, лежащей в шаре $B(0, r)$ с некоторым радиусом r . Тогда тривиальное решение уравнения (4) устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво).

Замечание 1. Теорема остается верной при $r = \infty$.

Замечание 2. Утверждения, аналогичные теореме 3, с логарифмической нормой оператора $A'(x)$, замененной на $\sup(\Re \sigma(A'(x)))$, верны в гильбертовом пространстве H . Здесь $\sigma(A)$ – спектр оператора A .

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0. \quad (10)$$

Здесь A – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства B в B .

Мы связываем уравнение (10) с задачей Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (11)$$

$$x(0) = x_0. \quad (12)$$

Пусть x^* – решение уравнения (10), положим $x = x^* + v$. Тогда уравнение (10) трансформируется в $A(x^* + v) - A(x^*) = 0$. Замена переменной $x(t) = x^* + v(t)$ сводит задачу Коши (11), (12) к следующей:

$$\frac{dv(t)}{dt} = A(x^* + v(t)) - A(x^*), \quad (13)$$

$$v(0) = x_0 - x^*. \quad (14)$$

Очевидно, что если тривиальное решение уравнения (13) асимптотически устойчиво в целом, то решение задачи Коши (13), (14) стремится к x^* для любого начального значения.

Из теоремы 3 следует, что если неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0, \quad (15)$$

выполняется для каждой непрерывно дифференцируемой функции $g(t) : [0, \infty) \rightarrow B$, то решение задачи Коши (13), (14) сходится к решению x^* уравнения (10).

Следующие утверждения были доказаны в [11].

Теорема 4. Пусть уравнение (10) имеет решение x^* и пусть неравенство (15) выполняется на каждой дифференцируемой кривой $g(t)$, лежащей в банаховом пространстве B . Тогда решение задачи Коши (13), (14) сходится к решению x^* уравнения (10) для любого начального значения.

Замечание 3. Из неравенства (15) следует, что теорема 4 справедлива и в случаях, когда логарифмическая норма $\Lambda(A'(x))$ может принимать значение нуль или положительные значения в конечном или счетном количестве точек пространства B .

Теорема 5. Пусть уравнение (10) имеет решение x^* и пусть на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, лежащей в шаре $B(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) неравенство

$$\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0$$

выполняется для всех t ($t > 0$);

2) неравенство (15) выполнено.

Тогда решение задачи Коши (11), (12) сходится к решению x^* уравнения (10).

Единственность решений бисингулярных интегральных уравнений вида (5)

Пусть $f(t_1, t_2)$ – функция, определенная в области R_2 . Введем обозначения:

$$f_{++}(t_1, t_2) = \begin{cases} f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in (t_1 > 0) \cap (t_2 > 0), \\ 0, & (t_1, t_2) \in (t_1 < 0) \cup (t_2 < 0); \end{cases}$$

$$f_{+-}(t_1, t_2) = \begin{cases} -f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in (t_1 > 0) \cap (t_2 < 0), \\ 0, & (t_1, t_2) \in (t_1 < 0) \cup (t_2 > 0); \end{cases}$$

$$f_{-+}(t_1, t_2) = \begin{cases} -f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in (t_1 < 0) \cap (t_2 > 0), \\ 0, & (t_1, t_2) \in (t_1 > 0) \cup (t_2 < 0); \end{cases}$$

$$f_{--}(t_1, t_2) = \begin{cases} f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in (t_1 < 0) \cap (t_2 < 0), \\ 0, & (t_1, t_2) \in (t_1 > 0) \cup (t_2 > 0). \end{cases}$$

При этих обозначениях

$$f(t_1, t_2) = f_{++}(t_1, t_2) - f_{+-}(t_1, t_2) - f_{-+}(t_1, t_2) + f_{--}(t_1, t_2).$$

Замечание. Значения $f(t_1, t_2)$ при $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ не влияют на дальнейшие рассуждения.

Определение 1. Функция $f(t_1, t_2)$ принадлежит классу $\{0, 0\}$, если ее преобразование Фурье $F(\omega_1, \omega_2)$ принадлежит $L_2(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$ и удовлетворяет условию Гельдера:

$$|F(\lambda_1, \mu_1) - F(\lambda_2, \mu_2)| \leq A \left(|\lambda_1 - \lambda_2|^\alpha + |\mu_1 - \mu_2|^\alpha \right),$$

для любых действительных значений λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 , а для любых по модулю больших единицы λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 :

$$|F(\lambda_1, \mu_1) - F(\lambda_2, \mu_2)| \leq A \left(\left| \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right|^\alpha + \left| \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right|^\alpha \right).$$

Определение 2. Функция $f(t_1, t_2)$ принадлежит классу $\{\alpha, \beta\}$, если $f(t_1, t_2)e^{-\alpha t_1 - \beta t_2} \in \{0, 0\}$.

Определение 3. Функция

$$f(t_1, t_2) = f_{++}(t_1, t_2) - f_{+-}(t_1, t_2) - f_{-+}(t_1, t_2) + f_{--}(t_1, t_2)$$

принадлежит классу $\{\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \delta_1, \delta_2\}$, если $f_{++}(t_1, t_2) \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $f_{+-}(t_1, t_2) \in \{\beta_1, \beta_2\}$, $f_{-+}(t_1, t_2) \in \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $f_{--}(t_1, t_2) \in \{\delta_1, \delta_2\}$.

Определение 4. Через $E(a, b; c, d)$ обозначим класс функций $f(x_1, x_2)$, определенных на плоскости R_2 и принимающих в области $\Omega = (a, b; c, d)$ заранее заданные значения:

$$f(x_1, x_2) = f^*(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

В работе [16] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. В классе функций $x(t_1, t_2) \in \{\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \delta_1, \delta_2\}$, где $\alpha_1 \leq 0 \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq 0 \leq \beta_2$, $\gamma_1 \leq 0 \leq \gamma_2$, $\delta_1 \leq 0 \leq \delta_2$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\delta_1 \neq \delta_2$ уравнение (5) имеет единственное решение.

Доказательство. Применив к уравнению (5) преобразование Фурье, приходим к алгебраическому уравнению

$$X(\omega_1, \omega_2)G(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1, \omega_2),$$

где $X(\omega_1, \omega_2)$, $G(\omega_1, \omega_2)$, $F(\omega_1, \omega_2)$ – преобразование Фурье функций $x(t_1, t_2)$, $g(t_1, t_2)$, $f(t_1, t_2)$, причем функция $G(\omega_1, \omega_2)$ определена формулой

$$G(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 2, & \omega_1 > 0, \quad \omega_2 > 0, \\ -2, & \omega_1 < 0, \quad \omega_2 < 0, \\ 0, & \omega_1 < 0, \quad \omega_2 > 0, \quad \omega_1 > 0, \quad \omega_2 < 0, \\ 1, & \omega_1 = 0, \quad \omega_2 > 0, \quad \omega_1 > 0, \quad \omega_2 = 0, \\ -1, & \omega_1 = 0, \quad \omega_2 < 0, \quad \omega_1 < 0, \quad \omega_2 = 0. \end{cases}$$

Функция $X(\omega_1, \omega_2)$ является аналитической в области D пространства C^2 комплексных переменных z_1 и z_2 , являющейся топологическим произведением полос $\max(\alpha_1, \beta_1) < y_1 < \min(\gamma_1, \delta_1)$ и $\max(\alpha_2, \gamma_2) < y_2 < \min(\delta_2, \beta_2)$. Здесь $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Из этого утверждения и приведенной выше функции $G(\omega_1, \omega_2)$ следует справедливость леммы.

Лемма 2. Пусть $\Omega = (a, b; c, d)$, $-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$. Пусть ищется решение $x(t_1, t_2)$, для которого в области Ω выполняется условие $x(t_1, t_2) = u(t_1, t_2)$, где $u(t_1, t_2)$ – заданная функция, $(t_1, t_2) \in \Omega$. В классе функций $E(\Omega)$ уравнение (5) имеет единственное решение.

Доказательство леммы подобно доказательству аналогичной леммы для вырожденных сингулярных интегральных уравнений [17] и здесь опускается.

Замечание 2. Из леммы 2 вытекает следующая постановка задачи решения полисингулярных интегральных уравнений вида (5), аналогичная задаче Коши в теории обыкновенных дифференциальных уравнений или граничной задаче в теории уравнений с частными производными.

Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная область, $\Omega \in (-\infty, \infty)^2$. Пусть в Ω задана функция $u(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in \Omega$. Требуется найти решение уравнения (5), удовлетворяющее на множестве Ω условию $x(t_1, t_2) = u(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in \Omega$.

Замечание 3. Пользуясь леммами 2, 3, можно сформулировать утверждения, аналогичные теоремам 4, 5 работы [16], о классах единственности решений уравнений вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Приближенное решение вырожденных бисингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим бисингулярное интегральное уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = f(t_1, t_2). \quad (16)$$

Для решения уравнения (16) ниже строятся две вычислительные схемы.

Первая вычислительная схема

Аппроксимируем уравнение (16) более простым уравнением

$$\int_{-A}^{+A} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \int_{-A}^{+A} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = f(t_1, t_2), \quad (17)$$

где A – достаточно большие положительные числа.

Для упрощения описания вычислительной схемы введем различные обозначения для узлов по переменным t_1 и t_2 . По переменной t_1 введем узлы

$$v_k = -A + \frac{2A}{N}k, \quad k = \overline{0, N}, \quad \bar{v}_k = v_k + \frac{A}{N}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

По переменной t_2 введем узлы

$$w_k = -A + \frac{2A}{N}k, \quad k = \overline{0, N}, \quad \bar{w}_k = w_k + \frac{A}{N}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Приближенное решение уравнения (17) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{kl} \Psi_{kl}(t_1, t_2), \quad (18)$$

где

$$\Psi_{kl}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & (t_1, t_2) \in \Delta_{kl}, \\ 0, & [-A, A]^2 \setminus \Delta_{kl}, \end{cases}$$

$$\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}) \times [w_l, w_{l+1}), \quad k, l = \overline{0, N-1},$$

$$\Delta_{N-1, l} = [v_{N-1}, v_N] \times [w_l, w_{l+1}), \quad l = \overline{0, N-1},$$

$$\Delta_{k, N-1} = [v_k, v_{k+1}) \times [w_{N-1}, w_N], \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$\Delta_{N-1, N-1} = [v_{N-1}, v_N] \times [w_{N-1}, w_N].$$

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}$, $k, l = \overline{0, N-1}$, определяются из следующей системы уравнений:

$$\frac{2A}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kj} \int_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \bar{v}_i} + \frac{2A}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{il} \int_{w_l}^{w_{l+1}} \frac{d\tau_2}{\tau_2 - \bar{w}_j} = f(\bar{t}_i, \bar{t}_j), \quad i, j = \overline{0, N-1}. \quad (19)$$

Эту систему можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_{ki} \alpha_{kj} + \sum_{l=0}^{N-1} b_{lj} \alpha_{il} = f(\bar{v}_i, \bar{w}_j), \quad i, j = \overline{0, N-1},$$

здесь

$$a_{ki} = \frac{2A}{N} \int_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \bar{v}_i} = \frac{2A}{N} \ln \left| \frac{v_{k+1} - \bar{v}_i}{v_k - \bar{v}_i} \right|, \quad k, i = \overline{0, N-1},$$

$$b_{lj} = \frac{2A}{N} \int_{w_l}^{w_{l+1}} \frac{d\tau_2}{\tau_2 - \bar{w}_j} = \frac{2A}{N} \ln \left| \frac{w_{l+1} - \bar{w}_j}{w_l - \bar{w}_j} \right|, \quad l, j = \overline{0, N-1}.$$

Выпишем подробно одну строку системы:

$$0 + \dots + 0 + a_{0i}\alpha_{0j} + a_{1i}\alpha_{1j} + \dots + a_{N-1,i}\alpha_{N-1,j} + 0 + \dots + 0 + \\ + b_{0j}\alpha_{i0} + b_{1j}\alpha_{i1} + \dots + b_{N-1,j}\alpha_{i,N-1} + 0 + \dots + 0 = f_{ij}, \quad i, j = \overline{0, N-1}. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что доминирующими коэффициентами являются a_{ii} и b_{jj} . При этих коэффициентах в качестве неизвестных выступает α_{ij} .

Учитывая это замечание, систему (20) можно записать в виде

$$(a_{ii} + b_{jj})\alpha_{ij} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} a_{ki}\alpha_{kj} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{N-1} b_{lj}\alpha_{il} = f_{ij}, \quad i, j = \overline{0, N-1}. \quad (21)$$

К системе (21) можно применить непрерывный метод решения операторных уравнений

$$\frac{d\alpha_{ij}(\sigma)}{d\sigma} = \lambda_{ij} \left[(a_{ii} + b_{jj})\alpha_{ij}(\sigma) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N-1} a_{ki}\alpha_{kj}(\sigma) + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{N-1} b_{lj}\alpha_{il}(\sigma) - f_{ij} \right], \quad (22)$$

где $\lambda_{ij} = \pm 1$, $i, j = \overline{0, N-1}$.

Знак λ_{ij} выбирается из условия получения отрицательного значения логарифмической нормы матрицы, стоящего в левой части системы уравнения (21).

Для решения системы уравнений (22) может быть использован любой метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В случае, если логарифмическая норма отрицательна, то система (22) устойчива к возмущениям коэффициентов, правых частей и начальных значений, что особенно важно при решении систем с неединственным решением.

Вторая вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (16) будем искать в виде полинома

$$x_n(t_1, t_2) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \alpha_{kl} \Psi_k(t_1) \Psi_l(t_2),$$

где

$$\begin{aligned}\psi_k(t) &= \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^N (c_l(t)c_l(v_k) + s_l(t)s_l(v_k)) \right), c_l(t) = \cos 2l \operatorname{arctg} t, \\ s_l(t) &= \sin 2l \operatorname{arctg} t, v_k = tg \frac{k\pi}{2N+1}, k = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N. \\ \text{Коэффициенты } \{\alpha_{kl}\}, k, l = \overline{-N, N}, &\text{ находятся из системы уравнений} \\ \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \alpha_{kl} &\left[\left(\sum_{i=1}^N (s_i(v_r)c_i(v_k) + (c_i(v_r) + (-1)^{i+1})s_i(v_k)) \right) \psi_l(v_s) + \right. \\ &\left. + \left(\sum_{j=1}^N (s_j(v_s)c_j(v_l) + (c_j(v_s) + (-1)^{j+1})s_j(v_l)) \right) \psi_k(v_r) \right] = \\ &= f(v_r, v_s), \quad r, s = \overline{-N, N}. \quad (23)\end{aligned}$$

При построении вычислительной схемы (23) использованы формулы [18]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_n(\tau)}{\tau - t} d\tau = c_n(t) + (-1)^{n+1}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(\tau)}{\tau - t} d\tau = s_n(t).$$

Учитывая, что $\psi_l(v_s) = \delta_{ls}$, где δ_{ls} – символ Кронекера, систему (23) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \alpha_{kl} &\left[\left(\sum_{i=1}^N (s_i(v_r)c_i(v_k) + (c_i(v_r) + (-1)^{i+1})s_i(v_k)) \right) \delta_{ls} + \right. \\ &\left. + \left(\sum_{j=1}^N (s_j(v_s)c_j(v_l) + (c_j(v_s) + (-1)^{j+1})s_j(v_l)) \right) \delta_{kr} \right] = f(v_r, v_s), \quad r, s = \overline{-N, N}. \quad (24)\end{aligned}$$

Для численной реализации вычислительной схемы (24) используется непрерывный операторный метод.

Модельный пример

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = f(t_1, t_2), \quad (25)$$

где

$$f(t_1, t_2) = 2At_1 + 2At_2 + t_1t_2 \ln \left| \frac{A-t_1}{A+t_1} \right| + t_1t_2 \ln \left| \frac{A-t_2}{A+t_2} \right|.$$

Точное решение уравнения (25) равно $x(t_1, t_2) = t_1 t_2$. Уравнение (25) будем аппроксимировать уравнением в конечных пределах

$$\int_{-A}^{+A} \frac{x(t_1, t_2)}{t_1 - t_1} d\tau_1 + \int_{-A}^{+A} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 = f(t_1, t_2).$$

Результаты решения уравнения (25), полученные по первой вычислительной схеме при $A = 5$ и $N = 100$, приведены в табл. 1 и на рис. 1.

Таблица 1

Приближенное решение уравнения (25)

Точка t_1	Точка t_2	Точное решение	Приближенное решение	Погрешность
-4,85	1,85	-8,9725	-9,0395	0,067
-3,85	-0,85	3,2725	3,2195	0,053
-2,85	3,85	-10,9725	-10,97	0,004
-1,85	-2,85	5,2725	5,2555	0,017
-0,85	4,85	-4,1225	-4,1235	0,001
0,85	-4,85	-4,1225	-4,1345	0,012
1,85	2,85	5,2725	5,2675	0,005
2,85	-3,85	-10,9725	-10,9795	0,007
3,85	-1,85	-7,1225	-7,0335	0,089
4,85	0,85	4,1225	4,3135	0,191

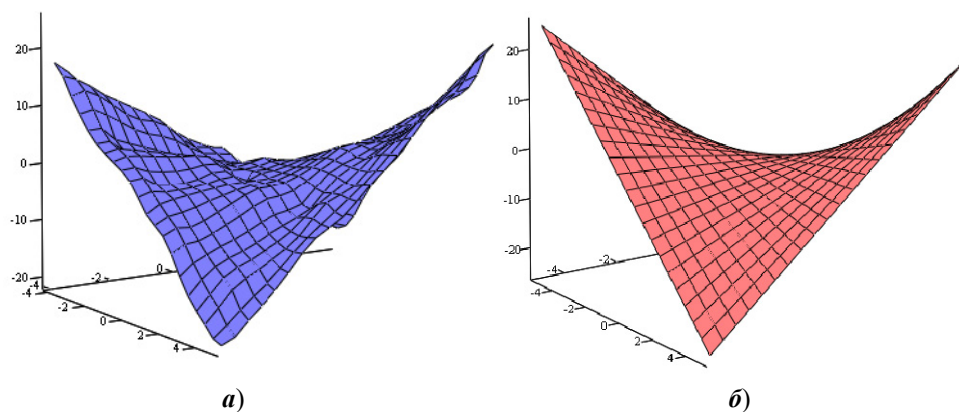


Рис. 1. Приближенное (а) и точное (б) решения уравнения (25)

Библиографический список

1. **Симоненко, И. Б.** Характеристические бисингулярные уравнения в пространствах суммируемых функций / И. Б. Симоненко // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 2. – С. 115–120.
2. **Пилиди, В. С.** Обоснование метода вырезания особенности для бисингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами / В. С. Пилиди // Известия вузов. Математика. – 1990. – № 7. – С. 51–60.
3. **Козак, А. В.** О проекционных методах решения двумерных сингулярных уравнений на торе / А. В. Козак, И. Б. Симоненко // Функциональный анализ и его приложение. – 1978. – Т. 12, № 1. – С. 74–75.

4. **Какичев, В. А.** Методы решения некоторых краевых задач для аналитических функций двух комплексных переменных / В. А. Какичев. – Тюмень : Тюменский гос. университет, 1973. – 124 с.
5. **Какичев, В. А.** Краевая задача типа задачи Гильберта для пары функций, аналитических в биообластях / В. А. Какичев // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. 22, № 2. – С. 356–360.
6. **Какичев, В. А.** О задаче Римана для p -конуса в алгебрах Владимирова / В. А. Какичев, В. М. Шелкович // Математические заметки. – 1980. – Т. 27, № 6. – С. 899–911.
7. **Бойков, И. В.** Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.
8. **Гахов, Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва : Наука, 1963. – 640 с.
9. **Лаврентьев, М. М.** Об одном классе сингулярных интегральных уравнений / М. М. Лаврентьев // Успехи математических наук. – 1979. – Т. 34, № 4. – С. 143.
10. **Лаврентьев, М. М.** Об одном классе сингулярных интегральных уравнений / М. М. Лаврентьев // Сибирский математический журнал. – 1980. – Т. 21, № 3. – С. 225–228.
11. **Бойков, И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
12. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1970.
13. **Лозинский, С. М.** Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I / С. М. Лозинский // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 5. – С. 52–90.
14. **Бойков, И. В.** Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений / И. В. Бойков // Доклады Академии наук СССР. – 1990. – Т. 314, № 6. – С. 1298–1300.
15. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2008.
16. **Бойков, И. В.** Об одном исключительном случае сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях : межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 6. – Пенза : Изд-во Пенз. политех. ин-та, 1984. – С. 3–11.
17. **Бойков, И. В.** К вопросу о единственности решений вырожденных сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ю. Кудряшова, А. А. Шалдаева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1 (53). – С. 3–21. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-1.
18. **Gregor, J.** O aproximaci obrazu v Hilbertove transformaci ortogonalnimi radami racionalnich lomenych funkci / J. Gregor // Aplik. Matem. Ceskoslovenska Akademie VED. – 1961. – Vol. 6, № 3. – P. 214–240.

References

1. Simonenko I. B. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1974, no. 2, pp. 115–120. [In Russian]
2. Pilidi V. S. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1990, no. 7, pp. 51–60. [In Russian]
3. Kozak A. V., Simonenko I. B. *Funktsional'nyy analiz i ego prilozhenie* [Functional analysis and its application]. 1978, vol. 12, no. 1, pp. 74–75. [In Russian]
4. Kakichev V. A. *Metody resheniya nekotorykh kraevykh zadach dlya analiticheskikh funktsiy dvukh kompleksnykh peremennykh* [Methods for solving some boundary value problems for analytic functions of two complex variables]. Tyumen: Tyumenskiy gos. universitet, 1973, 124 p. [In Russian]

5. Kakichev V. A. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1986, vol. 22, no. 2, pp. 356–360. [In Russian]
6. Kakichev V. A., Shelkovich V. M. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1980, vol. 27, no. 6, pp. 899–911. [In Russian]
7. Boykov I. V. *Priblizhennoe reshenie singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Approximate solution of singular integral equations]. Penza: Izd-vo PGU, 2004, 316 p. [In Russian]
8. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow: Nauka, 1963, 640 p. [In Russian]
9. Lavrent'ev M. M. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1979, vol. 34, no. 4, p. 143. [In Russian]
10. Lavrent'ev M. M. *Sibirskiy matematicheskii zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 1980, vol. 21, no. 3, pp. 225–228. [In Russian]
11. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]
12. Daletskiy Yu. L., Kreyn M. G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow: Nauka, 1970. [In Russian]
13. Lozinskiy S. M. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1958, no. 5, pp. 52–90. [In Russian]
14. Boykov I. V. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1990, vol. 314, no. 6, pp. 1298–1300. [In Russian]
15. Boykov I. V. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy* [Stability of solutions of differential equations]. Penza: Izd-vo PGU, 2008. [In Russian]
16. Boykov I. V. *Primenenie vychislitel'nykh metodov v nauchno-tekhnicheskikh issledovaniyakh: mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Application of computational methods in scientific and technical research: interuniversity collected works]. Issue 6. Penza: Izd-vo Penz. politekh. in-ta, 1984, pp. 3–11. [In Russian]
17. Boykov I. V., Kudryashova N. Yu., Shaldaeva A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2020, no. 1 (53), pp. 3–21. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-1. [In Russian]
18. Gregor J. *Aplik. Matem. Ceskoslovenska Akademie VED* [Application. Mathematics. Czechoslovak Academy of Sciences]. 1961, vol. 6, no. 3, pp. 214–240.

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of
the sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Кудряшова Наталья Юрьевна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math.kudryashova@yandex.ru

Kudryashova Natal'ya Yur'evna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Шалдаева Анастасия Александровна
магистрант, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

Shaldaeva Anastasiya Aleksandrovna
Master's degree student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: nastyashaldaeva@mail.ru

Образец цитирования:

Бойков, И. В. Приближенные методы решения полисингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях / И. В. Бойков, Н. Ю. Кудряшова, А. А. Шалдаева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 44–60. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-5.

О ПРОБЛЕМЕ ВЫПОЛНИМОСТИ ЛОГИКО-АВТОМАТНЫХ ФОРМУЛ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. В теории конечных автоматов существует целый ряд способов определения конечных автоматов (конечно-автоматных функций). Среди них системы канонических уравнений, диаграммы Мура, информационные деревья, схемы из автоматных элементов, а также конечно-автоматные операции. Каждый из перечисленных способов обладает определенными достоинствами и находит применение в подходящих направлениях исследований. Довольно часто конечные автоматы используются в алгебре и логике. Так, например, хорошо известны результаты Дж. Бюхи о связи конечных автоматов с логикой второго порядка, а также результаты С. В. Алёшина по использованию групп конечно-автоматных перестановок в решении ослабленной проблемы Бернсайда.

Одно из перспективных направлений в теории конечных автоматов – исследование автоматных уравнений различных типов. Помимо хорошо известных канонических уравнений, здесь могут быть функциональные уравнения, в которых переменными являются конечные автоматы, а связи между ними осуществляются с помощью алгебраических и логических средств. Самым естественным вариантом представляется вариант, когда на основе заданных автоматов и функциональных переменных для (многовходовых) автоматов определяются автоматные термы, затем – равенства термов (элементарные формулы) и в заключение из элементарных формул с помощью логических связей – произвольные логико-автоматные формулы. Для таких формул ставится «классическая» проблема выполнимости. Особенность ее состоит в том, что рассматривается существование конечных автоматов, выполняющих данную формулу, т.е. дающих истинное значение формулы при любых значениях предметных переменных (их значениями являются произвольные сверхслова в алфавите $\{0,1\}$). Цель работы – доказать алгоритмическую разрешимость данной проблемы, при этом определить разрешающий алгоритм в автоматных терминах и в конечном счете свести задачу к направленному перебору (возможно, частичных и недетерминированных) автоматов.

Материалы и методы. В построениях и доказательствах применяются логико-автоматные методы.

Результаты и выводы. Рассматриваются логико-автоматные формулы, построенные с помощью логических связей из равенств автоматных термов. Для формул данного типа формулируется проблема выполнимости по функциональным (автоматным) переменным. При этом предполагается, что все предметные переменные (по двоичным сверхсловам) находятся под кванторами общности. Строится алгоритм, основанный на переборе частичных недетерминированных автоматов, который решает данную проблему. Предложенный

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19-01-00200.

© Марченков С. С., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

в работе подход к анализу и решению проблемы выполнимости для конечно-автоматных логических формул может быть использован при решении аналогичных алгоритмических проблем для логико-автоматных формул более сложных типов.

Ключевые слова: логико-автоматные формулы, проблема выполнимости.

S. S. Marchenkov

ON THE PROBLEM OF LOGIC-AUTOMATIC FORMULAS PERFORMABILITY

Abstract.

Background. In the theory of finite automata, there are a number of ways to define finite automata (finitely automatic functions). There are systems of canonical equations among them, Moore diagrams, information trees, schemes of automatic elements, and finite-automaton operations. Each of these methods has certain advantages and finds application in suitable research areas. Quite often finite automata are studied by algebraic and logical means. For example, the results of J. Büchi on the connection of finite automata with second-order logic are well known, as well as the results of S. V. Aleshin on the use of groups of finitely automatic permutations in solving the weakened Burnside problem. One of the promising directions in the theory of finite automata is the study of automaton equations of various types. In addition to the well-known canonical equations, there may be functional equations in which variables are finite automata, and connections between them are made using algebraic and logical means. The most natural option is the option when automaton terms are determined based on the given automata and functional variables for (multi-input) automata, then equality of terms (elementary formulas) and finally from elementary formulas using logical connectives-arbitrary logic automaton formulas. For such formulas, the “classic” feasibility problem is posed. Its peculiarity is that we consider the existence of finite automata that perform this formula, i.e. giving the true value of the formula for any values of subject variables (their values are arbitrary superwords in the alphabet $\{0,1\}$). The goal of this work is to prove the algorithmic solvability of this problem, while the resolving algorithm is defined in automata terms and ultimately based on a directed iteration of partial nondeterministic automata.

Materials and methods. Logic automaton methods are used in constructions and proofs.

Results and conclusions. We consider logic automaton formulas constructed using logical connectives from the equalities of automaton terms. For formulas of this type, the problem of satisfiability for functional (automatic) variables is formulated. It is assumed that all subject variables (for binary superwords) are under the generality quantifiers. We construct an algorithm based on the iteration of partial nondeterministic automata, which solves this problem. The proposed approach to analyzing and solving the satisfiability problem for finite-automaton logical formulas can be used to solve similar algorithmic problems for more complex types of logic automaton formulas.

Keywords: logic automaton formulas formulas, performability problem.

Введение

Конечный автомат является одним из простейших устройств, предназначенных для преобразования информации. В теории конечных автоматов имеется целый ряд способов определения конечных автоматов (конечно-

автоматных функций): с помощью систем канонических уравнений, с использованием диаграмм Мура и помеченных деревьев, посредством схем из автоматных элементов и с помощью конечно-автоматных операций [1–6]. Однако в этом направлении возможны и другие подходы, использующие в большей степени алгебраические и логические понятия. Здесь следует упомянуть прежде всего широко известный результат Дж. Бюхи [7, 8], который связывает конечные автоматы с логикой второго порядка. Существует также большое число результатов, которые можно отнести к алгебраической теории автоматов (см., например, [9–11]).

Особенность использования в теории автоматов канонических уравнений состоит в том, что переменная t – момент времени работы автомата или номер разряда бесконечной входной последовательности – всегда находится под квантором общности. Однако в логических формулах, содержащих конечно-автоматные функции, можно вообще отказаться от использования параметра t , а кванторы общности распространять на бесконечные последовательности (соответствующие переменные рассматриваются как переменные в конечно-автоматных функциях). Если при этом в логических формулах использовать отношение равенства – «минимальное» отношение между функциями, которое позволяет вводить логические операции и строить логические формулы, – то мы приходим к некоторому логико-автоматному языку, проблема выполнимости для которого будет рассматриваться в данной работе.

Нас будет интересовать проблема существования наборов конечных автоматов (конечно-автоматных функций), которые удовлетворяют логическим формулам этого языка. В предлагаемом ниже логико-автоматном формализме эта проблема может быть записана формулой второго порядка с кванторами существования по автоматным переменным. С этой точки зрения данную проблему следует отнести к логике второго порядка. В настоящей работе мы определяем алгоритм, который по произвольной формуле рассматриваемого типа решает вопрос о существовании указанных наборов конечных автоматов. Его работа состоит из двух этапов. Сначала по логико-автоматной формуле Φ эффективно определяется ориентированный граф G_Φ с пометками (фактически частичный недетерминированный автомат), а затем конечным перебором «внутри» графа G_Φ устанавливается существование/несуществование набора конечных автоматов, удовлетворяющих формуле Φ .

Основные понятия

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$ и E_2^∞ – множество всех упорядоченных бесконечных последовательностей, составленных из элементов множества E_2 . Рассматриваем конечно-автоматные функции (конечные инициальные автоматы), отображающие множество $(E_2^\infty)^n$ в множество E_2^∞ – функции с n входами и одним выходом ($n = 1, 2, \dots$). Подобную функцию можно задать каноническими (автоматными) уравнениями, которые имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t), q(t-1)), \\ q(t) = g(x_1(t), \dots, x_n(t), q(t-1)), \\ q(0) = q_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x_i(t), y(t), q(t)$ – значения i -го входа, выхода и состояния в момент времени t ; Q – конечное множество состояний (инициального автомата, реализующего данную функцию); f, g – функции, отображающие множество $E_2^n \times Q$ соответственно в множества E_2 и Q ; q_0 – начальное состояние. Предполагается, что в начальный момент времени $t=0$ автомат находится в состоянии q_0 . Начиная с момента времени $t=1$ на вход автомата поступают наборы

$$(x_1(1), \dots, x_n(1)), (x_1(2), \dots, x_n(2)), \dots,$$

и с помощью уравнений (1) из них формируются выходная последовательность $y = y(1)y(2)\dots$

Будем использовать предметные переменные $x_1, x_2, \dots$ для обозначения произвольных последовательностей из E_2^∞ . Символами $A_i^{(n)}, B_i^{(n)}, C_i^{(n)}$ обозначаем конкретные конечно-автоматные функции с n входами, а символами $\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}$ – автоматные переменные, принимающие значения в множестве конечно-автоматных функций от n (предметных) переменных. При построении автоматных формул используем знак равенства $=$, а также логические связки из фиксированной полной системы логических связок.

Обычным образом по индукции вводим понятие автоматного термина: если $i, j, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ – произвольные натуральные числа, то выражения вида

$$A_i^{(m)}(x_{u_1}, \dots, x_{u_m}), \alpha_j^{(n)}(x_{v_1}, \dots, x_{v_n})$$

считаем автоматными терминами (помимо выражений $A_i^{(m)}$ используются также выражения $B_i^{(m)}, C_i^{(m)}$, а кроме выражений $\alpha_i^{(n)}$ – выражения $\beta_i^{(n)}$). Индуктивный шаг определения автоматного термина отличается от предыдущего только тем, что вместо предметных переменных рассматриваются выражения, которые могут быть как произвольными предметными переменными, так и уже построенными терминами.

Равенствами называем выражения вида $T_1 = T_2$, где T_1, T_2 суть автоматные термы. Равенства считаем элементарными автоматными формулами. С помощью логических связок из элементарных автоматных формул определяем остальные автоматные формулы. В дальнейшем в выражениях $A_i^{(m)}, B_i^{(m)}, C_i^{(m)}, \alpha_j^{(n)}, \beta_j^{(n)}$ верхние индексы будем, как правило, опускать.

Рассмотрим произвольную автоматную формулу

$$\Phi(A_1, \dots, A_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m, x_1, \dots, x_n), \quad (2)$$

которая образована из символов $A_1, \dots, A_k$ автоматных функций, символов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ автоматных переменных и символов $x_1, \dots, x_n$ предметных пере-

менных. Будем говорить, что формула (2) выполнима, если истинна замкнутая формула

$$(\exists \alpha_1) \dots (\exists \alpha_m) (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \Phi(A_1, \dots, A_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m, x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

где квантор $\exists \alpha_i$ распространяем по всем конечно-автоматным функциям от n_i переменных и n_i есть число предметных переменных у автоматной переменной α_i в формуле (2). Проблемой выполнимости для логики-автоматных формул называем алгоритмическую проблему, состоящую в определении по произвольной формуле (2) истинностного значения замкнутой формулы (3).

Каждый из символов формулы (2) может входить в формулу, вообще говоря, не один раз. Нас будут интересовать все вхождения символов $A_1, \dots, A_k$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Поэтому мы перепишем формулу (2) в «развернутом» виде:

$$\Phi(A_{11}, \dots, A_{1c_1}, \dots, A_{k1}, \dots, A_{kc_k}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1d_1}, \dots, \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{md_m}, x_1, \dots, x_n), \quad (4)$$

оставляя без изменения обозначение Φ и указывая все вхождения $A_{j1}, \dots, A_{jc_j}$ символов A_j и все вхождения $\alpha_{l1}, \dots, \alpha_{ld_l}$ символов α_l . Подчеркнем еще раз, что (4) является лишь вариантом формулы (2), в котором указаны в некотором порядке все вхождения символов A_j и символов α_l .

В дальнейшем нам понадобится осуществить переход от автоматной формулы (4) к ее булевому аналогу, в котором вместо автоматных функций $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$ и автоматных переменных $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{md_m}$ рассматриваются булевы функции $A'_{11}, \dots, A'_{kc_k}$ и переменные $\alpha'_{11}, \dots, \alpha'_{md_m}$ для булевых функций. При этом переходе полностью сохраняется структура формулы (4), а также число и порядок предметных переменных в функциях и функциональных переменных. Чтобы различать предметные переменные с областями значений E_2^∞ и E_2 , в последнем случае будем использовать обозначения $x'_1, \dots, x'_n$. Соответствующую булеву формулу записываем в виде

$$\Phi(A'_{11}, \dots, A'_{1c_1}, \dots, A'_{k1}, \dots, A'_{kc_k}, \alpha'_{11}, \dots, \alpha'_{1d_1}, \dots, \alpha'_{m1}, \dots, \alpha'_{md_m}, x'_1, \dots, x'_n). \quad (5)$$

Результаты

Предположим, что набор $(B_1, \dots, B_m)$ автоматных функций удовлетворяет (тождественно по переменным $x_1, \dots, x_n$) формуле (2). Рассмотрим состояния и выходные функции автоматов формулы

$$\Phi(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m, x_1, \dots, x_n) \quad (6)$$

в произвольный момент времени t . Пусть в этот момент времени автоматы $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$ находятся соответственно в состояниях $q_{11}, \dots, q_{kc_k}$ (отметим, что в момент t один и тот же автомат может находиться в разных состояниях — это зависит от положения автомата в формуле (6), что, естественно, вынуждает пользоваться обозначениями $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$). Пусть далее автоматы

$B_{11}, \dots, B_{md_m}$ в момент t находятся в состояниях $p_{11}, \dots, p_{md_m}$ (мы вновь указываем на положение автоматов B_l в формуле (6)). Считая, что в состояниях $q_{11}, \dots, q_{kc_k}$ и $p_{11}, \dots, p_{md_m}$ автоматы реализуют соответственно булевы функции $A'_{11}, \dots, A'_{kc_k}$ и $B'_{11}, \dots, B'_{md_m}$, приходим к заключению, что формула (5) тождественно истинна по булевым переменным $x'_1, \dots, x'_n$. Это простое соображение позволит нам в дальнейшем находить наборы автоматных функций, удовлетворяющие формуле (2).

Используя булеву формулу (5), можно рассматривать формулу

$$\Phi(f_{11}, \dots, f_{1c_1}, \dots, f_{k1}, \dots, f_{kc_k}, g_{11}, \dots, g_{1d_1}, \dots, g_{m1}, \dots, g_{md_m}, x'_1, \dots, x'_n) \quad (7)$$

для произвольных наборов $(f_{11}, \dots, f_{kc_k}), (g_{11}, \dots, g_{md_m})$ булевых функций (с соблюдением очевидных условий для числа и порядка переменных в функциях). В связи с этим для любого набора булевых функций $(f_{11}, \dots, f_{kc_k})$ пусть

$$\left(g_{11}^1, \dots, g_{md_m}^1 \right), \dots, \left(g_{11}^s, \dots, g_{md_m}^s \right) - \quad (8)$$

все наборы булевых функций, которые вместе с набором $(f_{11}, \dots, f_{kc_k})$ удовлетворяют формуле (7) тождественно по переменным $x'_1, \dots, x'_n$. Отметим, что для некоторых наборов $(f_{11}, \dots, f_{kc_k})$ множество (8) может оказаться пустым.

По формуле Φ будем строить конечный ориентированный граф G_Φ с помеченными вершинами и дугами, который в известном смысле содержит информацию о выполнимости формулы (2). Вершины графа G_Φ помечаем наборами

$$(q_{11}, \dots, q_{kc_k}; g_{11}, \dots, g_{md_m}), \quad (9)$$

в которых $q_{11}, \dots, q_{kc_k}$ – состояния автоматов $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$, а $(g_{11}, \dots, g_{md_m})$ – набор из (8), где в качестве функций $f_{11}, \dots, f_{kc_k}$ берутся выходные функции автоматов $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$, которые реализуются ими в состояниях $q_{11}, \dots, q_{kc_k}$. Дуги графа G_Φ помечаем наборами из E_2^n .

Пусть вершина v графа G_Φ помечена набором (9) и $\tilde{a} \in E_2^n$. Из вершины v проведем в графе G_Φ дуги с пометкой $\tilde{a}$ в каждую вершину с пометкой $(p_{11}, \dots, p_{kc_k}; h_{11}, \dots, h_{md_m})$, где состояния $p_{11}, \dots, p_{kc_k}$ получаются согласно формуле Φ из состояний $q_{11}, \dots, q_{kc_k}$ автоматов $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$, если переменным $x'_1, \dots, x'_n$ присвоить значения из набора $\tilde{a}$, а выходными функциями автоматов, занимающих позиции переменных $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{md_m}$, считать соот-

ответственно функции $g_{11}, \dots, g_{md_m}$. Набор $(h_{11}, \dots, h_{md_m})$ будет одним из наборов (8), которые, как выше, определяются для функций $f_{11}, \dots, f_{kc_k}$, реализуемых автоматами $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$ в состояниях $p_{11}, \dots, p_{kc_k}$.

В качестве «начальных» вершин графа G_Φ берем все вершины с пометками (9), где $q_{11}, \dots, q_{kc_k}$ – начальные состояния автоматов $A_{11}, \dots, A_{kc_k}$ (при этом в каждой группе $q_{j1}, \dots, q_{jc_j}$ все состояния одинаковы), а функции $g_{11}, \dots, g_{md_m}$ выбираются для функций $f_{11}, \dots, f_{kc_k}$, реализуемых в состояниях $q_{11}, \dots, q_{kc_k}$, как это указано выше. Отметим еще, что в каждой группе $(g_{j1}, \dots, g_{jd_j})$ функции также одинаковы, поскольку в начальный момент времени все автоматы каждой из указанных групп находятся в одном и том же состоянии.

Остается добавить, что построение графа G_Φ в вершине v обрывается, если соответствующее множество наборов (8) оказывается пустым. В дальнейшем можно предполагать, что в графе G_Φ удалены все вершины, которые недостижимы из какой-либо начальной вершины (достижимость рассматривается с учетом ориентации дуг графа).

Как видно из построения, граф G_Φ можно рассматривать как диаграмму Мура частичного недетерминированного автомата, имеющего, вообще говоря, несколько начальных состояний. Обозначим через r число всевозможных наборов вида (9) – максимально возможное число вершин в графе G_Φ . Установим два утверждения, касающихся связи графа G_Φ с наборами автоматов, удовлетворяющих формуле (2).

Лемма 1. Если существует набор автоматов, удовлетворяющих формуле (2), то на основе графа G_Φ можно определить набор автоматов, также удовлетворяющих формуле (2), каждый из которых имеет не более r состояний.

Доказательство. Пусть набор $(B_1, \dots, B_m)$ конечных инициальных автоматов удовлетворяет формуле (2). Выберем в графе G_Φ начальную вершину v_0 , которая отвечает начальным состояниям автоматов $B_1, \dots, B_m$. Рассмотрим произвольное слово $\bar{a}$ длины r (т.е. упорядоченную последовательность длины r , состоящую из двоичных наборов длины n). Под действием входа $\bar{a}$ в графе G_Φ образуется путь через вершины $v_1, \dots, v_r$. Поскольку в графе G_Φ не более r вершин, последовательность $v_0, v_1, \dots, v_r$ содержит повторение. Пусть i, j – такие числа, что $i < j$, $v_i = v_j$, и в последовательности

$$v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1} \quad (10)$$

все вершины различны. Образует объединение всех множеств вида (10) (по всем словам $\bar{a}$ длины r) и обозначим его через Q . На основе множества Q определим набор инициальных автоматов $(C_1, \dots, C_m)$.

Все автоматы $C_1, \dots, C_m$ будут иметь одно и то же множество состояний, состоящее из наборов, приписанных вершинам множества Q . В качестве начального состояния возьмем набор, приписанный вершине v_0 . Упорядочим далее все слова $\bar{a}$ длины r . Пусть $\bar{a}_1$ – первое из этих слов. Рассмотрим последовательность (10), отвечающую слову $\bar{a}_1$. Пусть $v = v_l$, $l < j-1$ и существует такое начало $\bar{b}$ слова $\bar{a}_1$ длины l , что $\bar{b}\tilde{a}$ есть начало слова $\bar{a}_1$ и под действием слова $\bar{b}$ граф G_Φ из вершины v_0 попадает в вершину v_l . Тогда считаем, что все автоматы $C_1, \dots, C_m$ под действием входа $\tilde{a}$ переходят из «состояния», приписанного вершине v , в состояние, приписанное вершине v_{l+1} , а их выходы совпадают с выходами «автомата» G_Φ при аналогичном переходе. Почти так же рассматриваем случай, когда $l = j-1$ (остальные допущения остаются в силе): здесь следующим состоянием будет состояние, приписанное вершине v_i , а выход определяется выходом автомата G_Φ при переходе из вершины v_{j-1} в вершину v_i .

Далее рассматриваем следующее слово $\bar{a}_2$, соответствующую ему последовательность (10), а также те вершины из последовательности (10) и наборы $\tilde{a}$, которые не были рассмотрены в случае слова $\bar{a}_1$. Этот процесс продолжаем до исчерпания всех слов $\bar{a}$ длины r . Отметим, что к одной и той же вершине v в графе G_Φ можно прийти по различным путям (определяемыми словами $\bar{a}$). Поэтому за счет состояний автоматов $B_1, \dots, B_m$ может возникнуть ситуация, когда для различных слов $\bar{a}$ и одного и того же входа $\tilde{a}$ выход и следующая за вершиной v вершина графа G_Φ будут определяться по-разному. Однако из этой «противоречивой» ситуации мы выходим с помощью упорядочивания всех слов $\bar{a}$ и определения следующих состояний и выходов автоматов $C_1, \dots, C_m$ в порядке рассмотрения слов $\bar{a}$.

Довольно очевидно, что указанной процедурой переходы и выходы автоматов $C_1, \dots, C_m$ будут определены для всех «состояний» (наборов), приписанных вершинам множества Q . В самом деле, если $v \in Q$, то для некоторого слова $\bar{a}$ длины r вершина v появится в соответствующей последовательности (10). Если $v = v_l$ и набор $\tilde{a}$ индуцирует переход из вершины v_l в вершину v_{l+1} (при $l = j-1$ – в вершину v_i), то либо при рассмотрении слова $\bar{a}$, либо на одном из предыдущих этапов для пары $(\tilde{a}, v_l)$ в автоматах $C_1, \dots, C_m$ будут определены следующее состояние и выходы. Если же для слова $\bar{a}$ сформулированное условие не выполняется, то необходимо рассмотреть слово $\bar{b}$, у которого начало длины l совпадает с началом длины l слова $\bar{a}$, а непосредственно следующим «символом» является набор $\tilde{a}$. Тогда для пары $(\tilde{a}, v_l)$ нужные параметры будут определены либо при рассмотрении слова $\bar{b}$, либо на одном из предыдущих (по отношению к слову $\bar{b}$) этапов.

Поскольку выходы у автоматов $C_1, \dots, C_m$ являются также выходами автоматов $B_1, \dots, B_m$, набор автоматов $C_1, \dots, C_m$ будет удовлетворять формуле (2). Отметим еще, что в определении автоматов $C_1, \dots, C_m$ не будет проти-

воречий, которые возможны из-за несовпадения автоматов, занимающих позиции переменных $\alpha_{l_1}, \dots, \alpha_{l_{d_j}}$, это вытекает из того, что определение автоматов $C_1, \dots, C_m$ базируется на имеющемся наборе автоматов $(B_1, \dots, B_m)$, удовлетворяющих формуле (2).

Для завершения доказательства леммы остается из набора автоматов $(C_1, \dots, C_m)$ «вычленить» отдельные инициальные автоматы C_i . Для i -го автомата достаточно выбрать выходные функции, относящиеся к i -м компонентам состояний автоматов $C_1, \dots, C_m$. Если при этом функции переходов и выхода окажутся определенными не всюду, следует доопределить их произвольным образом (это не скажется на истинности формулы (2), поскольку подобные доопределения не участвуют при рассмотрении набора автоматов $(B_1, \dots, B_m)$). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть в графе G_Φ существует подграф G' , который удовлетворяет следующим условиям: он содержит ровно одну начальную вершину графа G_Φ ; для каждой вершины v и для любого набора $\tilde{a}$ в графе G' имеется только одна дуга, выходящая из вершины v и помеченная набором $\tilde{a}$. Тогда граф G' определяет набор конечных автоматов, который удовлетворяет формуле (2).

Доказательство. То, что граф G' удовлетворяет заключению леммы 2, почти очевидно: для любой бесконечной последовательности входов в графе G' имеется единственный путь, который исходит из начальной вершины графа и отвечает данной последовательности. Кроме того, из определения графа G_Φ видно, что пройденные на этом пути состояния графа G' обеспечивают истинность формулы (2). Как и в лемме 1, чтобы на основе графа G' определить искомый набор инициальных автоматов, следует для каждого автомата взять все множество состояний, которое имеется в графе G' , и для i -го автомата набора «выделить» из состояний графа G' только те функции выхода, которые относятся к рассматриваемому автомату. Если при этом функция выхода окажется не всюду определенной, то, как и в лемме 1, следует доопределить ее произвольным образом. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее основное утверждение.

Теорема. Задача выполнимости (по функциональным переменным) формулы (2) алгоритмически разрешима: для ее решения достаточно выяснить, имеется ли в графе G_Φ подграф G' , удовлетворяющий условиям леммы 2.

Библиографический список

1. Брауэр, В. Введение в теорию конечных автоматов / В. Брауэр. – Москва : Радио и связь, 1987. – 392 с.
2. Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов / А. Гилл. – Москва : Наука, 1966. – 272 с.
3. Кудрявцев, В. Б. Элементы теории автоматов / В. Б. Кудрявцев, С. В. Алёшин, А. С. Подколзин. – Москва : Наука, 1985. – 320 с.
4. Марченков, С. С. Конечные автоматы / С. С. Марченков. – Москва : Физматлит, 2008. – 56 с.

5. **Марченков, С. С.** Функциональные уравнения дискретной математики / С. С. Марченков. – Москва : Физматлит, 2013. – 58 с.
6. **Трахтенброт, Б. А.** Конечные автоматы. Поведение и синтез / Б. А. Трахтенброт, Я. М. Барздинь. – Москва : Наука, 1970. – 400 с.
7. **Büchi, J. R.** Weak second-order arithmetic and finite automata / J. R. Büchi // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*. – 1960. – Bd. 6, № 1. – S. 66–92.
8. **Büchi, J. R.** On a decision algorithm in restricted second order arithmetic / J. R. Büchi // *Logic, methodology and philosophy of science. Proceedings of the 1960 International Congress*. – 1962. – P. 1–11.
9. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. – Москва : Статистика, 1975. – 335 с.
10. **Алёшин, С. В.** Автоматы в алгебре / С. В. Алёшин // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 23–32.
11. **Алёшин, С. В.** Алгебраические системы автоматов / С. В. Алёшин. – Москва : МАКС Пресс, 2016. – 190 с.

References

1. Brauer V. *Vvedenie v teoriyu konechnykh avtomatov* [Introduction to the theory of finite state automaton]. Moscow: Radio i svyaz', 1987, 392 p. [In Russian]
2. Gill A. *Vvedenie v teoriyu konechnykh avtomatov* [Introduction to the theory of finite state automaton]. Moscow: Nauka, 1966, 272 p. [In Russian]
3. Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S. *Elementy teorii avtomatov* [Elements of automata theory]. Moscow: Nauka, 1985, 320 p. [In Russian]
4. Marchenkov S. S. *Konechnye avtomaty* [Finite state automaton]. Moscow: Fizmat-lit, 2008, 56 p. [In Russian]
5. Marchenkov S. S. *Funktsional'nye uravneniya diskretnoy matematiki* [Functional equations of discrete mathematics]. Moscow: Fizmatlit, 2013, 58 p. [In Russian]
6. Trakhtenbrot B. A., Barzdin' Ya. M. *Konechnye avtomaty. Povedenie i sintez* [Finite state automaton. Behavior and synthesis]. Moscow: Nauka, 1970, 400 p. [In Russian]
7. Büchi J. R. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* [Journal of mathematical logic and fundamentals of mathematics]. 1960, vol. 6, no. 1, pp. 66–92.
8. Büchi J. R. *Logic, methodology and philosophy of science. Proceedings of the 1960 International Congress*. 1962, pp. 1–11.
9. *Algebraicheskaya teoriya avtomatov, yazykov i polugrupp* [Algebraic theory of automata, languages and semigroups]. Moscow: Statistika, 1975, 335 p. [In Russian]
10. Aleshin S. V. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and applied mathematics]. 2009, vol. 15, no. 3, pp. 23–32. [In Russian]
11. Aleshin S. V. *Algebraicheskie sistemy avtomatov* [Algebraic systems of automata]. Moscow: MAKS Press, 2016, 190 p. [In Russian]

Марченков Сергей Серафимович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра математической
кибернетики, Московский
государственный университет
имени М. В. Ломоносова (Россия,
г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: ssmarchen@yandex.ru

Marchenkov Sergey Serafimovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of mathematical cybernetics, Moscow
State University (1 Leninskiye Gory,
Moscow, Russia)

Образец цитирования:

Марченков, С. С. О проблеме выполнимости логико-автоматных формул / С. С. Марченков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 61–71. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-6.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Струйные течения жидкостей и газов применяются в различных областях техники как эффективные средства управления процессами тепло- и массообмена, для интенсификации и стабилизации различных технологических процессов (например процесса размешивания, процесса горения), как средство защиты различных конструкций от воздействия тепловых и других полей, для нанесения покрытий и др. Среди практически важных объектов исследования отметим также горелочные устройства, форсунки двигателей, струйно-вихревые следы летательных аппаратов. Струйные течения применяются во многих отраслях техники и технологии, что делает задачу их исследования актуальной. Целью данной работы является изучение процессов теплообмена в закрученных струях.

Материалы и методы. Для решения задачи используется асимптотический метод, предполагающий разложение гидродинамических функций (составляющих вектора скорости и давления) и температуры, удовлетворяющих системе уравнений Навье – Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, в ряды по малому параметру. Решение полученной в первом приближении системы дифференциальных уравнений с частными производными отыскивается в автомодельном виде, что приводит к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций, зависящих от автомодельной переменной.

Результаты. Построено в первом приближении автомодельное решение задачи о распределении гидродинамических (составляющих вектора скорости и давления) и теплового (температуры) полей в осесимметричной тангенциально закрученной струе вязкой несжимаемой жидкости. Представленный в статье материал дополняет известные ранее результаты расчетом теплового поля в струе.

Выводы. На основе полученных асимптотических дифференциальных уравнений и автомодельных решений этих уравнений построены поля скоростей, давления и температуры в тангенциально закрученной струе вязкой несжимаемой жидкости. Показано, что на распределение теплового поля в струе уже в первом приближении оказывают влияние продольная и тангенциальная (вращательная) составляющие скорости. Указан способ уточнения построенного решения.

Ключевые слова: аэрогидродинамика, закрученная струя, вязкость, теплообмен, дифференциальные уравнения, асимптотическое разложение, автомодельное решение.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, № 19-41-730006).

© Вельмисов П. А., Мизхер У. Д., Тамарова Ю. А., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

P. A. Vel'misov, U. D. Mizkher, Yu. A. Tamarova

ASYMPTOTIC STUDY OF HEAT AND MASS TRANSFER PROCESSES IN JET FLOWS

Abstract.

Background. Jet streams of liquids and gases are used in various fields of technology as effective means of controlling the processes of heat and mass transfer, for intensifying and stabilizing various technological processes (for example, the stirring process, the combustion process), as a means of protecting various structures from the effects of thermal and other fields, for applying coatings, etc. Among the practically important objects of research, we also note burners, engine nozzles, jet-vortex traces of aircraft. Jet streams are used in many branches of engineering and technology, which makes the problem of their study urgent. The aim of this work is to study the processes of heat and mass transfer in swirling jets.

Materials and methods. To solve the problem, the asymptotic method is used, which involves the expansion of hydrodynamic functions (components of the velocity vector and pressure) and temperature, satisfying the system of Navier-Stokes equations for a viscous incompressible fluid, in series with respect to a small parameter. The solution of the obtained in the first approximation system of partial differential equations is sought in a self-similar form, which leads to the study of a system of ordinary differential equations for functions depending on the self-similar variable.

Results. In a first approximation, the self-similar solution to the problem of the distribution of hydrodynamic (components of the velocity and pressure vector) and thermal (temperature) fields in an axisymmetric tangentially swirling stream of a viscous incompressible fluid is constructed. The material presented in the article supplements the previously known results by calculating the thermal field in the jet.

Conclusions. Based on the obtained asymptotic differential equations and self-similar solutions of these equations, the fields of velocities, pressure and temperature are constructed in a tangentially swirling stream of a viscous incompressible fluid. It is shown that the longitudinal and tangential (rotational) velocity components influence the distribution of the thermal field in the jet as a first approximation. The method for clarifying the constructed solution is indicated.

Keywords: aerohydrodynamics, swirling jet, viscosity, heat and mass transfer, differential equations, asymptotic expansion, self-similar solution.

Введение

Струйные течения жидкостей и газов применяются в различных областях техники как эффективные средства управления процессами тепло- и массообмена, для интенсификации и стабилизации различных технологических процессов (например процесса размешивания, процесса горения), как средство защиты различных конструкций от воздействия тепловых и электромагнитных полей, для нанесения покрытий и др. Среди практически важных объектов исследования отметим также горелочные устройства, форсунки двигателей, струйно-вихревые следы летательных аппаратов.

Струи жидкостей и газов в технике формируются в основном источниками-насадками конечных размеров с разнообразными распределениями начальных скоростей истечения в выходном сечении насадки. Большой класс течений составляют струи жидкостей и газов, характеризующиеся наличием продольного и поперечного градиентов давления (например струи, развива-

ющиеся на криволинейных поверхностях, и закрученные струи). Расчет аэродинамических и тепловых характеристик перечисленных выше струйных течений сводится к решению неавтономных задач. Однако одним из методов решения таких задач является метод асимптотического разложения скоростей, давления и температуры в ряды по малому параметру, когда первым членом этого ряда служит автомодельное решение, под которым понимают решение задачи о струе-источнике. Автомодельные решения, особенно записанные в аналитической форме, играют также важную роль при тестировании программ численного исследования сложных газодинамических потоков.

В данной статье на основе полученных асимптотических дифференциальных уравнений и автомодельных решений этих уравнений построены поля скоростей, давления и температуры в тангенциально закрученной струе вязкой несжимаемой жидкости. Показано, что на распределение теплового поля в струе уже в первом приближении оказывают влияние продольная и тангенциальная (вращательная) составляющие скорости. Указан способ уточнения построенного решения.

1. Вывод асимптотических уравнений

Система уравнений Навье – Стокса, описывающая движение жидкости (газа) в модели вязкой несжимаемой среды, в цилиндрической системе координат имеет вид [1, 2]:

$$u_t + uu_x + \vartheta u_r = -\frac{1}{\rho} P_x + \nu \left(u_{xx} + u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad (1)$$

$$\vartheta_t + u\vartheta_x + \vartheta\vartheta_r - \frac{1}{r} w^2 = -\frac{1}{\rho} P_r + \nu \left(\vartheta_{xx} + \vartheta_{rr} + \frac{1}{r} \vartheta_r - \frac{1}{r^2} \vartheta \right), \quad (2)$$

$$w_t + uw_x + \vartheta w_r + \frac{1}{r} \vartheta w = \nu \left(w_{xx} + w_{rr} + \frac{1}{r} w_r - \frac{1}{r^2} w \right), \quad (3)$$

$$u_x + \vartheta_r + \frac{1}{r} \vartheta = 0, \quad (4)$$

$$\rho c_{\vartheta} (T_t + uT_x + \vartheta T_r) = \lambda \left(T_{xx} + T_{rr} + \frac{1}{r} T_r \right) + \mu \Phi. \quad (5)$$

Здесь $u(x, r, t)$, $\vartheta(x, r, t)$, $w(x, r, t)$ – продольная (вдоль горизонтальной оси Ox), поперечная (радиальная, перпендикулярная оси Ox) и тангенциальная (вращательная) составляющие вектора скорости $\vec{V}$ жидкости; $T(x, r, t)$ – температура; ρ , μ , $\nu = \mu / \rho$ – плотность, динамическая и кинематическая вязкости среды; c_{ϑ} , λ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности среды; x , r – координаты; t – время, индексы снизу обозначают частные производные. Диссипативная функция Φ определяется выражением [1, 2]:

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(z)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial y} + \frac{\partial V_{(y)}}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial z}+\frac{\partial V_{(z)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial z}+\frac{\partial V_{(z)}}{\partial y}\right)^2, \quad (6)$$

где $V_{(x)}, V_{(y)}, V_{(z)}$ – проекции вектора скорости $\vec{V}$ на оси декартовой системы координат x, y, z , при этом имеет место следующая связь между проекциями вектора скорости в декартовой и цилиндрической системах координат:

$$V_{(x)}=u, \quad V_{(y)}=v\sin\theta+w\cos\theta,$$

$$V_{(z)}=v\cos\theta-w\sin\theta,$$

здесь $u=\frac{dx}{dt}, v=\frac{dr}{dt}, w=r\frac{d\theta}{dt}$, при этом r, θ – полярные координаты в плоскости, перпендикулярной оси Ox ($y=r\sin\theta, z=r\cos\theta$).

Получим асимптотические уравнения для течений с малой радиальной составляющей v вектора скорости, используя метод малого параметра [3–5]. Положим

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,r_*,t)\varepsilon^{k-1}, \quad v=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x,r_*,t)\varepsilon^{k-1}, \quad w=\sum_{k=1}^{\infty}w_k(x,r_*,t)\varepsilon^{k-1}, \quad (7)$$

$$P-P_0=\sum_{k=1}^{\infty}P_k(x,r_*,t)\varepsilon^{k-1}, \quad T-T_0=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(x,r_*,t)\varepsilon^{k-1},$$

здесь $r=\varepsilon r_*$, где ε – малый параметр, определяющий порядок кинематической вязкости ν и коэффициента теплопроводности λ ($\nu=\varepsilon^2\nu_*, \frac{\lambda}{\rho}=\varepsilon^2\lambda_*$), при этом новая переменная r_* и постоянные ν_*, λ_* являются величинами порядка единицы.

Подставляя (7) в (1)–(4) и оставляя старшие по порядку члены, для четырех функций u_1, v_1, P_1, w_1 получим систему уравнений пограничного слоя:

$$u_{1t}+u_1u_{1x}+v_1u_{1r_*}=-\frac{1}{\rho}P_{1x}+\nu_*\left(u_{1r_*r_*}+\frac{1}{r_*}u_{1r_*}\right), \quad (8)$$

$$\frac{1}{r_*}w_1^2=-\frac{1}{\rho}P_{1r_*}, \quad (9)$$

$$w_{1t}+u_1w_{1x}+v_1w_{1r_*}+\frac{1}{r_*}v_1w_1=\nu_*\left(w_{1r_*r_*}+\frac{1}{r_*}w_{1r_*}-\frac{1}{r_*^2}w_1\right), \quad (10)$$

$$u_{1x}+v_{1r_*}+\frac{1}{r_*}v_1=0. \quad (11)$$

Аналогично, из (5) с учетом (6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ находим

$$c_{\vartheta} \left(T_{1t} + u_1 T_{1x} + \vartheta_1 T_{1r_*} \right) = \lambda_* \left(T_{1r_*} + \frac{1}{r_*} T_{1r_*} \right) + v_* \left[u_{1r_*}^2 + \left(w_{1r_*} - \frac{1}{r_*} w_1 \right)^2 \right]. \quad (12)$$

2. Построение полей скоростей и давления

Решение системы уравнений (8)–(11), соответствующее стационарному струйному течению, будем искать в виде рядов по обратным степеням x :

$$\begin{aligned} u_1 &= v_* \left[x^{-1} f_1(\eta) + x^{-2} f_2(\eta) + x^{-3} f_3(\eta) + \dots \right], \\ \vartheta_1 &= v_* \left[x^{-1} g_1(\eta) + x^{-2} g_2(\eta) + x^{-3} g_3(\eta) + \dots \right], \\ w_1 &= v_* \left[x^{-2} h_1(\eta) + x^{-3} h_2(\eta) + x^{-4} h_3(\eta) + \dots \right], \\ \frac{1}{\rho} P_1 &= v_*^2 \left[x^{-4} H_1(\eta) + x^{-5} H_2(\eta) + x^{-6} H_3(\eta) + \dots \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $\eta = r_* / x$ – автомодельная переменная.

Подставляя разложения (13) в (8)–(11) и приравнявая суммарные коэффициенты перед одинаковыми степенями x , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для f_i , g_i , h_i , H_i ($i = 1 \div \infty$). В частности, оставляя в (13) по одному слагаемому, в первом приближении получим

$$\begin{aligned} g_1 f_1' - f_1 (f + \eta f_1') &= f_1'' + \frac{1}{\eta} f_1', \quad \frac{1}{\eta} h_1^2 = H_1', \\ g_1 f_1' - f_1 (2h_1 + \eta h_1') + \frac{1}{\eta} g_1 h_1 &= h_1'' + \frac{1}{\eta} h_1' - \frac{1}{\eta^2} h_1, \\ g_1' + \frac{1}{\eta} g_1 - f_1 - \eta f_1' &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Решения уравнений (14), соответствующие струйному течению, имеют вид

$$f_1(\eta) = \frac{2\gamma^2}{\theta^2}, \quad g_1(\eta) = \frac{\gamma^2 \eta \left(1 - \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2 \right)}{\theta^2}, \quad h_1(\eta) = \frac{\gamma \xi \eta}{\theta^2}, \quad H_1(\eta) = -\frac{2}{3} \frac{\xi^2}{\theta^3}, \quad (15)$$

где $\theta = 1 + \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2$, а γ , ξ – произвольные постоянные, которые можно выразить через импульс и момент количества движения струи.

3. Исследование теплового поля

Стационарное тепловое поле в переменных (x, η) согласно (12) описывается уравнением

$$\begin{aligned}
& c_{\vartheta} \left[u_1 (x T_{1x} - \eta T_{1\eta}) + \vartheta_1 T_{1\eta} \right] = \\
& = \frac{\lambda^*}{x} \left(T_{1\eta\eta} + \frac{1}{\eta} T_{1\eta} \right) + \frac{v^*}{x} \left[u_{1\eta}^2 + \left(w_{1\eta} - \frac{1}{\eta} w_1 \right)^2 \right].
\end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что u_1 , ϑ_1 , w_1 имеют вид

$$u_1 = v^* x^{-1} f_1(\eta), \quad \vartheta_1 = v^* x^{-1} g_1(\eta), \quad w_1 = v^* x^{-2} h_1(\eta), \quad (17)$$

получим согласно (16), (15) для $T_1(x, \eta)$ уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma^2 c_{\vartheta}}{\theta^2} (2x T_{1x} - \eta \theta T_{1\eta}) - \frac{\lambda^*}{v^*} \left(T_{1\eta\eta} + \frac{1}{\eta} T_{1\eta} \right) = \\
& = 4\gamma^8 v_*^2 \frac{\eta^2}{\theta^6} \frac{1}{x^2} + \gamma^6 \xi^2 v_*^2 \frac{\eta^4}{\theta^6} \frac{1}{x^4}.
\end{aligned} \quad (18)$$

Будем искать частное решение уравнения (18) в виде

$$T_1(x, \eta) = v_*^2 \left[x^{-2} F_1(\eta) + x^{-4} F_3(\eta) \right]. \quad (19)$$

Для функций $F_1(\eta)$, $F_3(\eta)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$-\frac{\gamma^2 c_{\vartheta}}{\theta^2} (4F_1 + \eta \theta F_1') - \frac{\lambda^*}{v^*} \left(F_1'' + \frac{1}{\eta} F_1' \right) = 4\gamma^8 \frac{\gamma^2}{\theta^6}, \quad (20)$$

$$-\frac{\gamma^2 c_{\vartheta}}{\theta^2} (8F_3 + \eta \theta F_3') - \frac{\lambda^*}{v^*} \left(F_3'' + \frac{1}{\eta} F_3' \right) = \gamma^6 \xi^2 \frac{\gamma^4}{\theta^6}. \quad (21)$$

Введем новую независимую переменную:

$$y = \frac{\frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2}{1 + \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2}. \quad (22)$$

Тогда уравнения (20), (21) примут вид

$$-c_{\vartheta} (4F_1 + 2y F_1') - \frac{1}{2} \frac{\lambda^*}{v^*} [2y(1-y) F_1'' + (2-4y) F_1'] = 16\gamma^4 y(1-y)^3, \quad (23)$$

$$-c_{\vartheta} (8F_3 + 2y F_3') - \frac{1}{2} \frac{\lambda^*}{v^*} [2y(1-y) F_3'' + (2-4y) F_3'] = 16\xi^2 y^2 (1-y)^2. \quad (24)$$

Решение уравнения (23) будем искать в виде многочлена:

$$F_1(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4. \quad (25)$$

Для коэффициентов a, b, c, d, e получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(5\frac{\lambda_*}{v_*} - 3c_v\right)e = -4\gamma^4, \\ \left(6\frac{\lambda_*}{v_*} - 5c_v\right)d = 8e\frac{\lambda_*}{v_*} + 24\gamma^4, \\ \left(6\frac{\lambda_*}{v_*} - 8c_v\right)c = 9d\frac{\lambda_*}{v_*} - 48\gamma^4, \\ \left(\frac{\lambda_*}{v_*} - 3c_v\right)b = 2c\frac{\lambda_*}{v_*} + 8\gamma^4, \\ 4ac_v = -b\frac{\lambda_*}{v_*}, \end{cases}$$

из которой последовательно находятся e, d, c, b, a .

Аналогично, решение уравнения (24) представим в виде

$$F_3(y) = \bar{a} + \bar{b}y + \bar{c}y^2 + \bar{d}y^3 + \bar{e}y^4. \quad (26)$$

Коэффициенты $\bar{e}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{a}$ последовательно находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \left(5\frac{\lambda_*}{v_*} - 4c_v\right)\bar{e} = 4\xi^2, \\ \left(6\frac{\lambda_*}{v_*} - 7c_v\right)\bar{d} = 8\frac{\lambda_*}{v_*}\bar{e} - 16\xi^2, \\ \left(6\frac{\lambda_*}{v_*} - 12c_v\right)\bar{c} = 9\frac{\lambda_*}{v_*}\bar{d} + 16\xi^2, \\ \left(\frac{\lambda_*}{v_*} - 5c_v\right)\bar{b} = 2\frac{\lambda_*}{v_*}\bar{c}, \\ 8ac_v = -\frac{\lambda_*}{v_*}\bar{b}. \end{cases}$$

Таким образом, распределение температуры в струе определяется формулой (19), где функции F_1, F_3 имеют вид (25), (26), а переменная y определяется формулой (22).

Замечания. 1. В статье рассматривается первое приближение (имеется в виду координатное разложение (13)) решения задачи о распределении гидродинамического и теплового полей в закрученной струе. Для построения второго и третьего приближений следует воспользоваться разложением (13) для составляющих вектора скорости и давления, при этом разложение для функции $T_1(x, \eta)$ следует задать в виде

$$T_1(x, \eta) = v_*^2 \left[x^{-2} F_1(\eta) + x^{-3} F_2(\eta) + x^{-4} F_3(\eta) + \dots \right]. \quad (27)$$

2. Для решения различных тепловых задач для струйных течений функцию $T_1(x, \eta)$, удовлетворяющую уравнению (18), можно искать в виде

$$T_1(x, \eta) = T_1^0(x, \eta) + T_1^*(x, \eta), \quad (28)$$

где $T_1^*(x, \eta)$ имеет вид (19), (25), (26), а $T_1^0(x, \eta)$ удовлетворяет уравнению (18) без правой части. В этом случае решение соответствующего однородного уравнения можно искать в виде

$$T_1^0(x, \eta) = \sum_{k=1}^n x^{\lambda_k} G_k(\eta), \quad (29)$$

где λ_k – произвольные постоянные, а функции $G_k(\eta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\gamma^2 c_\vartheta}{\theta^2} (2\lambda_k G_k - \eta \theta G'_k) - \frac{\lambda_k^*}{v_*} \left(G_k'' + \frac{1}{\eta} G'_k \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Сумма (29) может содержать как конечное, так и бесконечное количество слагаемых.

Аналогичные исследования для струйных течений вязкой несжимаемой жидкости, но без построения теплового поля, проводились в [6–10]. Построенное решение задачи о струе можно уточнить как в смысле построения высших приближений координатных разложений (13), (27) (по координате x), так и в смысле высших приближений асимптотических разложений (7) (по малому параметру ε).

Библиографический список

1. **Лойцянский, Л. Г.** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 736 с.
2. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 744 с.
3. **Ван-Дайк, М.** Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – Москва : Мир, 1967. – 296 с.
4. **Коул, Дж.** Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – Москва : Мир, 1972. – 275 с.
5. **Найфэ, А.** Методы возмущений / А. Найфэ. – Москва, 1967.
6. **Лойцянский, Л. Г.** Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью / Л. Г. Лойцянский // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. 27, № 1. – С. 3–16.
7. **Фалькович, С. В.** Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью / С. В. Фалькович // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 2. – С. 282–288.
8. **Коробко, В. И.** Теория неавтономных струй вязкой жидкости / В. И. Коробко. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1977. – 220 с.

9. **Vel'misov, P. A.** Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows / P. A. Vel'misov, U. J. Mizher, E. P. Semenova // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2048, Iss. 1. – P. 040012-1–040012-11.
10. **Вельмисов, П. А.** Исследование струйных течений методом малого параметра / П. А. Вельмисов, У. Д. Мизхер, Е. П. Семенова // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании : материалы XIII Междунар. науч. конф. (Саранск, 12–16 июля 2017 г.). – Саранск : СВМО – 2017. – С. 470–475.

References

1. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1978, 736 p. [In Russian]
2. Shlikhting G. *Teoriya pogrannichnogo sloya* [Boundary layer theory]. Moscow: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1969, 744 p. [In Russian]
3. Van-Dayk M. *Metody vozmushcheniy v mekhanike zhidkosti* [Perturbation methods in fluid mechanics]. Moscow: Mir, 1967, 296 p. [In Russian]
4. Koul Dzh. *Metody vozmushcheniy v prikladnoy matematike* [Perturbation methods in applied mathematics]. Moscow: Mir, 1972, 275 p. [In Russian]
5. Nayfe A. *Metody vozmushcheniy* [Perturbation methods]. Moscow, 1967. [In Russian]
6. Loytsyanskiy L. G. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1953, vol. 27, no. 1, pp. 3–16. [In Russian]
7. Fal'kovich S. V. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1967, vol. 31, no. 2, pp. 282–288. [In Russian]
8. Korobko V. I. *Teoriya neavtomodel'nykh struy vyazkoy zhidkosti* [Theory of non-self-similar viscous fluid jets]. Saratov: Izd-vo Saratov. un-ta, 1977, 220 p. [In Russian]
9. Vel'misov P. A., Mizher U. J., Semenova E. P. *AIP Conference Proceedings*. 2018, vol. 2048, iss. 1, pp. 040012-1–040012-11.
10. Vel'misov P. A., Mizher U. D., Semenova E. P. *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunar. nauch. konf. (Saratovsk, 12–16 iyulya 2017 g.)* [Differential equations and their applications in mathematical modeling: proceedings of the III International scientific conference (Saratovsk, July 12-16, 2017)]. Saransk: SVMO, 2017, pp. 470–475. [In Russian]

Вельмисов Петр Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей математики, Ульяновский
государственный технический
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Северный Венец, 32)

E-mail: velmisov@ulstu.ru

Vel'misov Petr Aleksandrovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher mathematics, Ulyanovsk
State Technical University (32 Severny
Venets street, Ulyanovsk, Russia)

Мизхер Усама Джавад

аспирант, Ульяновский государственный
технический университет (Россия,
г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32)

E-mail: usama.mizher@gmail.com

Mizher Usama Jawad

Postgraduate student, Ulyanovsk State
Technical University (32 Severny
Venets street, Ulyanovsk, Russia)

Тамарова Юлия Александровна

соискатель, кафедра высшей математики,
Ульяновский государственный
технический университет (Россия,
г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32)

Tamarova Yuliya Aleksandrovna

Applicant, sub-department of higher
mathematics, Ulyanovsk State Technical
University (32 Severny Venets street,
Ulyanovsk, Russia)

E-mail: kazakovaua@mail.ru

Образец цитирования:

Вельмисов, П. А. Асимптотическое исследование процессов тепломас-сопереноса в струйных течениях / П. А. Вельмисов, У. Д. Мизхер, Ю. А. Тамарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 72–81. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-7.

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ РАССЕЯНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация.

Актуальность и цели. Множества нелинейных уравнений в частных производных, обладающих парой Лакса, являются либо точно интегрируемыми, либо уравнениями, допускающими богатые классы точных решений. Наиболее интересны с практической точки зрения исследования, способствующие развитию новых математических методов анализа нелинейных дифференциальных уравнений, в частности математической теории солитонов, которая имеет огромные перспективы в различных приложениях. Малоисследованным является обширный класс нелинейных многокомпонентных уравнений, имеющих важность прикладного характера. Целью настоящей статьи является анализ такого типа нелинейных уравнений, в частности уравнения трехволнового взаимодействия, а также построение их точных решений.

Материалы и методы. Анализ рассматриваемых нелинейных уравнений в частных производных, полученных при помощи операторного уравнения Лакса с дифференциальными операторами первого порядка и матричными коэффициентами третьего порядка, выполняется с помощью замены переменных. Данный метод позволяет классифицировать их по главной линейной части и привести исходные уравнения к более простому, эквивалентному виду, облегчающему дальнейшие исследования. Для отыскания точных решений применяется метод бегущих волн.

Результаты. Исследуемые нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с логарифмической нелинейностью относятся к классу уравнений Клейна – Гордона и с помощью замены переменных их линейная часть преобразуется к гиперболическому виду. Найдены интегральные решения исследуемых уравнений в виде бегущих волн и решения, заданные неявно в виде ряда.

Выводы. Результаты представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих парой Лакса, и могут использоваться при решении прикладных задач физики и техники. Данные результаты расширяют область возможностей для изучения задач математической теории солитонов и могут послужить основой для дальнейшего исследования и нахождения решений уравнений данного типа.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, операторное уравнение Лакса, пара Лакса, нелинейные гиперболические уравнения, решения в виде бегущих волн.

Т. В. Red'kina, О. В. Novikova

ANALYSIS OF NONLINEAR EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES ASSOCIATED WITH THE THIRD-ORDER SCATTERING OPERATOR

© Редькина Т. В., Новикова О. В., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Abstract.

Background. A plurality of nonlinear equations in partial derivatives having a Lax pair are either exactly integrable or equations that allow rich classes of exact solutions. The most interesting studies from a practical point of view were the development of new mathematical methods of analysis of non-linear differential equations, in particular, mathematical theory of solitons, which had huge prospects in various applications. Little research is the extensive class of nonlinear many-component equations of applied importance. The purpose of this article is to analyse this type of nonlinear equations, in particular the equation of three-wave interaction, as well as the structure of their exact solutions.

Materials and methods. Analysis of the considered nonlinear equations in the partial derivatives obtained by the Lax operator equation with first-order differential operators and third-order matrix coefficients is performed by variable substitution. This method allows them to be classified according to the main linear part and the initial equations to a simpler, equivalent species, which will be subject to further research. The traveling wave method is used to find accurate solutions.

Results. The studied nonlinear equations in the partial derivatives of the second-row with logarithmic nonlinearity belong to the Klein-Gordon class of equations and by replacing the variables their Liouville part is transformed to the hyperbolic species. Integral solutions of the studied equations in the form of traveling waves and solutions given implicitly in the form of a series have been found.

Conclusions. The results are of interest for the study of nonlinear differential equations having a Lax pair and can be used in solving applied problems of physics and engineering. These results provide an area of opportunity for studying problems of mathematical theory of solitons and can serve as a basis for further research and finding solutions to equations of this type.

Keywords: nonlinear equations in partial derivatives, Lax operator equation, Lax pair, nonlinear hyperbolic equations, solutions in the form of traveling waves.

Введение

Большинство нелинейных уравнений в частных производных, описываемых и исследуемых методами солитонной математики, получены с помощью операторного уравнения Лакса или уравнения нулевой кривизны, которые являются условием совместности пары линейных дифференциальных систем [1–3]. Всестороннее и углубленное изучение показало случай, когда для получения таких уравнений применялись системы второго порядка [4–7]. Менее исследован случай, когда размерность систем $n \geq 3$, который зачастую ведет к сильно переопределенным условиям [8]. Малоизучен класс нелинейных многокомпонентных уравнений, имеющих важность прикладного характера [9–12]. В работе [13] показана возможность использования линейных систем третьего порядка для получения нелинейных уравнений в частных производных, связанных с теорией солитонной математики, на случай многокомпонентных нелинейных уравнений, в частности уравнений трехволнового взаимодействия. В настоящей работе проведен анализ уравнений, полученных в работе [13], а также найдены некоторые точные решения в виде бегущих волн.

1. Материал и методика

Идея, лежащая в основе работы Лакса [14], заключается в том, что нелинейное уравнение

$$L_t = [L, A] = LA - AL,$$

где $[L, A] = LA - AL$ – коммутатор операторов L и A , L и A – операторная пара Лакса, эквивалентно системе линейных уравнений:

$$L\varphi = \mu\varphi,$$

$$\varphi_t = -A\varphi,$$

где L и A – линейные дифференциальные операторы. Для оператора L поставлена спектральная задача (φ – собственная функция, μ – собственное значение оператора L), оператор A определяет эволюцию собственных функций по времени.

В работе [13] авторами показано, что уравнение Лакса сводится к системе девяти уравнений, порядок которой можно понизить и свести к одному нелинейному уравнению в частных производных. В работе продемонстрированы примеры вывода нелинейных уравнений в частных производных и определение их пары Лакса в двух случаях: когда главный дифференциальный коэффициент рассматривается в виде нижнетреугольной матрицы и в случае, если постоянная матрица имеет диагональный вид. В результате получены нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с логарифмической нелинейностью.

Рассмотрим следующие уравнения:

$$\left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2 u_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \frac{u_{zx}}{u} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} \frac{u_{zz}}{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}^2}\right)^2 u_z \ln u = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2\right) u_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \frac{u_{zx}}{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}^2}\right)^2 u_z \ln u = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}\right)^2 - 2 \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2\right) uu_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} u_{zx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} u_{zz} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\left(\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2\right) (u^2)_z - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} u_{zx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} u_{zz} + \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)^2 (u^2)_z \ln u = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\alpha_{21}k}{2\alpha_{11}} u_z + (\ln u)_{zz} = (k\alpha_{11})^2 (\ln u)_{xx}, \quad (5)$$

$$u^2 \left(\beta_{22} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) [(\ln u)_x - u] + u_x = 0, \quad (6)$$

где α_{ij} , β_{ij} – параметры квадратных матриц третьего порядка $\alpha = (\alpha_{ij})$, $\beta = (\beta_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, операторов L и A в уравнении Лакса соответственно, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, k - \text{const}$.

2. Анализ гиперболических уравнений

Уравнения (1)–(6) относятся к классу уравнений Клейна – Гордона [15]:

$$u_{xt} = F(u, u_t, u_x).$$

Утверждение 1. Уравнение (1) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow u(\xi, \eta), \quad \xi = \alpha_{31}x - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})t, \quad \eta = x - 2k\alpha_{11}t,$$

преобразуется к гиперболическому виду

$$\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}}u[1 + 2\ln u]u_\xi - u_\eta\xi = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Перейдем в (1) в линейной части к переменным x , t , используя представление дифференциального оператора

$$2k\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8)$$

а нелинейную часть оставим без изменения, тогда уравнение переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2} \right)^2 uu_z[1 + 2\ln u] + k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{xx} + \\ & + \left(2\alpha_{31} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \right)u_{tx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}}u_{tt} = 0. \end{aligned}$$

Линейная часть вторых производных с постоянными коэффициентами может быть преобразована к одному из канонических видов с помощью характеристик. Составим характеристическое уравнение для линейной части:

$$k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \left(2\alpha_{31} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right)\frac{dt}{dx} + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} = 0,$$

имеются две действительные характеристики

$$t - \frac{\alpha_{31}x}{k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})} = C_1, \quad t - \frac{1}{2k\alpha_{11}}x = C_2.$$

Следовательно, замена переменных приведет уравнение к гиперболическому виду. Выполним замену:

$$u(x, t) \rightarrow u(\xi, \eta), \quad \xi = \alpha_{31}x - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})t, \quad \eta = x - 2k\alpha_{11}t.$$

$$u_x = \alpha_{31}u_\xi + u_\eta, \quad u_t = -k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_\xi - 2k\alpha_{11}u_\eta,$$

$$u_{xx} = (\alpha_{31})^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha_{31}u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xt} = -\alpha_{31}k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\xi\xi} - k(4\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} - 2k\alpha_{11}u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = k^2(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})^2 u_{\xi\xi} + 4k^2\alpha_{11}(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} + 4(k\alpha_{11})^2 u_{\eta\eta},$$

и уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2} \right)^2 u[1 + 2\ln u][2k\alpha_{11}\{\alpha_{31}u_\xi + u_\eta\} - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_\xi - \\ & - 2k\alpha_{11}u_\eta] + k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})[(\alpha_{31})^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha_{31}u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}] + \\ & + \left(2\alpha_{31} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}} \right) [-\alpha_{31}k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\xi\xi} - \\ & - k(4\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} - 2k\alpha_{11}u_{\eta\eta}] + \frac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}} \times \\ & \times \left[k^2(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})^2 u_{\xi\xi} + 4k^2\alpha_{11}(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})u_{\eta\xi} + 4(k\alpha_{11})^2 u_{\eta\eta} \right] = 0; \end{aligned}$$

$$u_{\xi\xi}: \quad k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})(\alpha_{31})^2 - k\alpha_{31}(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})\alpha_{31} = 0,$$

$$u_{\eta\eta}: \quad k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21}) + (-2\alpha_{11}\alpha_{31} + \alpha_{32}\alpha_{21})k = 0,$$

$$u_{\eta\xi}: \quad 4\alpha_{31}k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21}) - \frac{k}{2\alpha_{11}}(4\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})^2 = -\frac{k(\alpha_{32}\alpha_{21})^2}{2\alpha_{11}},$$

после сокращения на $\frac{k(\alpha_{32}\alpha_{21})^2}{2\alpha_{11}}$ уравнение примет гиперболический вид

(7). Теорема доказана.

Следствие 1. Уравнение (7) при замене функции

$$u(\xi, \eta) = e^{v(\xi, \eta)}, \quad (9)$$

где $v(\xi, \eta)$ – новая неизвестная функция, примет вид

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} e^v [1 + 2v]v_\xi - v_\xi v_\eta. \quad (10)$$

Уравнение (2) уже имеет канонический вид гиперболического типа, так как оператор (8) задает переход от независимых переменных x, t к переменным z, t :

$$u(x, t) \rightarrow u(z, t), \quad z = x - 2k\alpha_{11}t.$$

Аналогичные рассуждения относятся и к уравнению (3).

Лемма. Уравнения (2), (3) имеют канонический вид гиперболического типа.

Утверждение 2. Уравнение (4) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow u(\xi, \eta), \quad \xi = \alpha_{31}x - k(2\alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{21})t, \quad \eta = x - 2k\alpha_{11}t,$$

преобразуется к гиперболическому виду

$$(a + b \ln u)(u^2)_{\xi} - u_{\xi\eta} = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \frac{1}{2\alpha_{11}} \left(\frac{\alpha_{31}^2}{\alpha_{32}\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^3} \right) = a, \quad \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^4} = b.$$

Доказательство проводится аналогично теореме 1.

Следствие 2. Уравнение (11) при замене функции (9) примет вид

$$v_{\eta\xi} = (a + bv)e^v v_{\xi} - v_{\xi} v_{\eta}. \quad (12)$$

Уравнение (5) в переменных x, t имеет вид

$$\frac{\alpha_{21}k}{2\alpha_{11}} [2k\alpha_{11}u_x + u_t] + 3(k\alpha_{11})^2 (\ln u)_{xx} + 4k\alpha_{11} (\ln u)_{xt} + (\ln u)_{tt} = 0. \quad (13)$$

Утверждение 3. Уравнение (13) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow e^{v(\xi, \eta)}, \quad \xi = k\alpha_{11}t - x, \quad \eta = 3k\alpha_{11}t - x,$$

преобразуется к гиперболическому виду:

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2} e^v [v_{\eta} - v_{\xi}]. \quad (14)$$

Доказательство. Выполним в уравнении (13) замену функции так, чтобы вторые производные давали линейную часть, т.е.

$$u(x, t) \rightarrow e^{v(\xi, \eta)},$$

где $v(\xi(x, t), \eta(x, t))$ – новая неизвестная функция, а новые переменные ξ, η преобразовывали эту линейную часть к одному из канонических видов. Для этого составим характеристическое уравнение для линейной части

$$3(k\alpha_{11})^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - 4k\alpha_{11} \frac{dt}{dx} + 1 = 0,$$

и вычислим характеристики

$$t - \frac{1}{k\alpha_{11}}x = C_1, \quad t - \frac{1}{3k\alpha_{11}}x = C_2.$$

Так как получены две действительные характеристики, то уравнение приведет к гиперболическому типу. Замена переменных

$$\begin{aligned} u(x, t) &\rightarrow e^{v(\xi, \eta)}, \quad \xi = k\alpha_{11}t - x, \quad \eta = 3k\alpha_{11}t - x, \\ v_x &= -v_\xi - v_\eta, \quad v_t = k\alpha_{11}v_\xi + 3k\alpha_{11}v_\eta, \\ v_{tt} &= (k\alpha_{11})^2 v_{\xi\xi} + 6(k\alpha_{11})^2 v_{\eta\xi} + 9(k\alpha_{11})^2 v_{\eta\eta}, \quad v_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}, \\ v_{xt} &= -k\alpha_{11}v_{\xi\xi} - 4k\alpha_{11}v_{\eta\xi} - 3k\alpha_{11}v_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

после подстановки в уравнение (13) даст равенство (14).

Утверждение 4. Уравнение (6) с помощью замены переменных

$$u(x, t) \rightarrow e^{v(\xi, \eta)}, \quad \xi = x - \beta_{22}t, \quad t = t,$$

преобразуется к гиперболическому виду

$$v_{t\xi} = e^v v_t - e^{-v} v_\xi.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично.

3. Построение точных решений в виде бегущих волн

Решения вида бегущих волн называются решениями вида

$$v(\xi, \eta) = f(\zeta), \quad \zeta = \gamma\xi + \eta, \quad (15)$$

где величина γ играет скорость распространения волны [16, 17].

Профили решений вида бегущей волны в различные моменты времени образуются друг из друга преобразованием сдвига. Нахождение решений в виде бегущих волн выполняется прямой подстановкой выражения (15) и частных производных функции $v(\xi, \eta)$ в исходное уравнение.

Для уравнений (10), (12), (14) будем искать решение в виде функции (15). Выразим частные производные функции $v(\xi, \eta)$ и подставим в (12):

$$f'' = e^f [a + bf]f' - (f')^2. \quad (16)$$

Так как равенство не содержит независимой переменной в явном виде, то его порядок можно понизить, положив: f – новая независимая переменная, $f' = p(f)$ – новая функция, тогда (16) сведется к уравнению первого порядка

$$pp' = e^f [a + bf]p - p^2,$$

или при условии, что $p \neq 0$, получаем линейное уравнение

$$p' = e^f [a + bf] - p.$$

Его решение:

$$p(f) = \frac{1}{4}e^f [2a + 2bf - b] + C_1 e^{-f},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Решение исходного уравнения определим из обращения следующего интеграла:

$$4 \int \frac{e^f df}{e^{2f} [2a + 2bf - b] + C_1} = \gamma \xi + \eta + C_2, \quad (17)$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Утверждение 5. Уравнение (12) имеет решение в виде бегущих волн (15), получаемое из обращения интеграла (17), где γ, C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Следствие 3. Уравнение (10) имеет решение в виде бегущих волн (15), получаемое из обращения интеграла

$$\int \frac{e^f df}{e^{2f} f + C_1} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma \xi + \eta) + C_2, \quad (18)$$

где γ, C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Если в (18) постоянная интегрирования $C_1 = 0$, то интеграл сводится к известному виду $\int \frac{e^{ay} dy}{y}$.

Определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t dt}{t} = Ei(x)$$

называется интегральной показательной функцией. Интеграл расходится в точке $t = 0$, в этом случае под $Ei(x)$ понимается главное значение несобственного интеграла:

$$Ei(x) = C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!},$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right),$$

где C – постоянная Эйлера.

Утверждение 6. Уравнение (10) имеет решение, заданное неявно в виде ряда

$$\ln|v| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n \cdot n!} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (\gamma \xi + \eta) + C_2,$$

где постоянная γ ; C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. Выполним простую проверку, для этого выразим из (10) производные $v_{\xi\eta}, v_{\xi}, v_{\eta}$:

$$v_{\xi} \left(\frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^{n-1}}{n!} \right) = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma,$$

в левой части вынесем дробь $1/v$ за скобки и заменим полученную сумму показательной функцией

$$v_{\xi} \frac{1}{v} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-v)^n}{n!} \right) = v_{\xi} \frac{1}{v} e^{-v},$$

в результате получим v_{ξ} :

$$v_{\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma v e^v. \quad (19)$$

Аналогичные действия приводят к v_{η} :

$$v_{\eta} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} v e^v. \quad (20)$$

Продифференцируем (20) еще раз по переменной ξ , тогда

$$v_{\eta\xi} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} (v+1) e^v v_{\xi},$$

выполняя замену (19), получим

$$v_{\eta\xi} = \left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \right)^2 \gamma (v+1) v e^{2v}.$$

Подставим найденные производные в уравнение (10), имеем

$$\left(\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \right)^2 \gamma (v+1) v e^{2v} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \left(e^v [1+2v] - v e^v \right) \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}} \gamma v e^v.$$

Очевидно, что равенство выполняется тождественно.

Следствие 4. Уравнение (12) имеет решение в виде бегущих волн (15), получаемое из обращения интеграла

$$\ln \left| \frac{2a-b}{2b} + v \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} \left(\frac{2a-b}{2b} + v \right)^n = 2b e^{\frac{1-a}{2b}} (\gamma\xi + \eta) + C_2,$$

где γ, C_2 – постоянные интегрирования.

Утверждение 7. Уравнение (14) имеет решение в виде бегущих волн (15)

$$v(\xi, \eta) = \ln C_1 + C_1 [\gamma\xi + \eta] - \ln \left| \frac{1}{C_2} - e^{\frac{C_1\alpha_{21}[1-\gamma]}{8\gamma\alpha_{11}^2} [\gamma\xi + \eta]} \right|,$$

где γ, C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Заключение

Результаты исследований представляют интерес для изучения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, обладающих парой Лакса, и могут использоваться при решении прикладных задач физики и техники. Данные результаты расширяют область возможностей для изучения задач математической теории солитонов и могут послужить основой для дальнейшего исследования и нахождения решений рассматриваемых уравнений и других уравнений солитонного типа.

Библиографический список

1. Ablowitz, M. J. A. Solitons, nonlinear equations and inverse scattering / M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1991. – 516 p.
2. Богоявленский, О. И. Опрокидывающиеся солитоны в двумерных интегрируемых уравнениях / О. И. Богоявленский // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 4 (274). – С. 17–77.
3. Calogero, F. A method to generate solvable nonlinear evolution equations / F. Calogero // Lett. Nuovo Cimento. – 1975. – Vol. 14. – P. 443–447.
4. Редькина, Т. В. Нелинейные уравнения, интегрируемые методами солитонной математики : монография / Т. В. Редькина. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 161 с.
5. Редькина, Т. В. Комплексификация иерархии уравнения Кортевега – де Вриза : монография / Т. В. Редькина. – Ставрополь : Изд-во СКФУ, 2015. – 67 с.
6. Новикова, О. В. Исследование комплекснозначного нелинейного уравнения в частных производных / О. В. Новикова // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. – 2012. – № 4. – С. 160–166.
7. Новикова О. В. Исследование нелинейного комплексного дифференциального уравнения в частных производных, обладающего парой Лакса : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. – Воронеж, 2015. – 146 с.
8. Баданин, А. В. Оператор третьего порядка с периодическими коэффициентами на вещественной оси / А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25, № 5. – С. 1–31.
9. Герджиков, В. С. О многокомпонентных уравнениях типа нелинейного уравнения Шредингера на симметричных пространствах и их редукциях / В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, Н. А. Костов // Теоретическая и математическая физика. – 2005. – Т. 144, № 2. – С. 313–323.
10. Герджиков, В. С. Многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера с постоянными граничными условиями / В. С. Герджиков, Н. А. Костов, Т. И. Валчев // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 159, № 3. – С. 438–447.
11. On classification of soliton solutions of multicomponent nonlinear evolution equations / V. S. Gerdjikov, N. A. Kostov, T. I. Valcher, D. J. Kaup // Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical. – 2008. – Vol. 41, № 31. – P. 1–36.
12. Gerdjikov, V. S. Reductions of multicomponent MKDV equations on symmetric spaces of DIII-type / V. S. Gerdjikov, N. A. Kostov // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2008. – Vol. 4. – P. 1–30.
13. Сурнева, О. Б. Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка / О. Б. Сурнева, О. С. Яновская // Наука. Инновации. Технологии. – 2018. – № 3. – С. 37–52.
14. Лакс, П. Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны / П. Д. Лакс // Математика. – 1969. – Т. 13, № 5. – С. 128–150.

15. Бете, Г. Квантовая механика / Г. Бете. – Москва : Мир, 1965. – 333 с.
16. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – Москва : Физматлит, 2005. – 256 с.
17. Тарасевич, Ю. Ю. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple : метод. рекоменд. / Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань, 2010. – 23 с.

References

1. Ablowitz M. J. A., Clarkson P. A. *Solitons, nonlinear equations and inverse scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 516 p.
2. Bogoyavlenskiy O. I. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1990, vol. 45, no. 4 (274), pp. 17–77. [In Russian]
3. Calogero F. *Lett. Nuovo Cimento*. 1975, vol. 14, pp. 443–447.
4. Red'kina T. V. *Nelineynye uravneniya, integriruyemye metodami solitonnoy matematiki: monografiya* [Nonlinear equations integrable by methods of soliton mathematics: monograph]. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, 161 p. [In Russian]
5. Red'kina T. V. *Kompleksifikatsiya ierarkhii uravneniya Kortevega – de Vriza: monografiya* [Complexification of the hierarchy of the Korteweg - de Vries equation: monograph]. Stavropol: Izd-vo SKFU, 2015, 67 p. [In Russian]
6. Novikova O. V. *Vestnik Baltiyskogo federal'nogo universiteta im. I. Kanta* [Bulletin of Immanuel Kant Baltic Federal University]. 2012, no. 4, pp. 160–166. [In Russian]
7. Novikova O. V. *Issledovanie nelineynogo kompleksnogo differentsial'nogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh, obladayushchego paroy Laksa: dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02* [Investigation of a nonlinear complex partial differential equation with a Lax pair: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Voronezh, 2015, 146 p. [In Russian]
8. Badanin A. V., Korotyaev E. L. *Algebra i analiz* [Algebra and analysis]. 2013, vol. 25, no. 5, pp. 1–31. [In Russian]
9. Gerdzhikov V. S., Grakhovski G. G., Kostov N. A. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2005, vol. 144, no. 2, pp. 313–323. [In Russian]
10. Gerdzhikov V. S., Kostov N. A., Valchev T. I. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 159, no. 3, pp. 438–447. [In Russian]
11. Gerdjikov V. S., Kostov N. A., Valchev T. I., Kaup D. J. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*. 2008, vol. 41, no. 31, pp. 1–36.
12. Gerdjikov V. S., Kostov N. A. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. 2008, vol. 4, pp. 1–30.
13. Surneva O. B., Yanovskaya O. S. *Nauka. Innovatsii. Tekhnologii* [Science. Innovation. Technology]. 2018, no. 3, pp. 37–52. [In Russian]
14. Laks P. D. *Matematika* [Mathematics]. 1969, vol. 13, no. 5, pp. 128–150. [In Russian]
15. Bete G. *Kvantovaya mekhanika* [Quantum mechanics]. Moscow: Mir, 1965, 333 p. [In Russian]
16. Polyanin A. D., Zaytsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 256 p. [In Russian]
17. Tarasevich Yu. Yu. *Nakhozhdienie i vizualizatsiya avtomodel'nykh resheniy differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh sredstvami Maple: metod. rekomend.* [Finding and visualizing self-similar solutions of partial differential equations by means of Maple: methodical recommendations]. Astrakhan, 2010, 23 p. [In Russian]

Редькина Татьяна Валентиновна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра прикладной математики
и математического моделирования,
Северо-Кавказский федеральный
университет (Россия, г. Ставрополь,
ул. Пушкина, 1)

E-mail: tvr59@mail.ru

Red'kina Tat'jana Valentinovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of applied mathematics
and mathematical modeling, North
Caucasian Federal University
(1 Pushkina street, Stavropol, Russia)

Новикова Ольга Викторовна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра информационной
безопасности автоматизированных
систем, Северо-Кавказский федеральный
университет (Россия, г. Ставрополь,
ул. Пушкина, 1)

E-mail: oly-novikova@yandex.ru

Novikova Ol'ga Viktorovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of information security
of automated systems, North Caucasian
Federal University (1 Pushkina street,
Stavropol, Russia)

Образец цитирования:

Редькина, Т. В. Анализ нелинейных уравнений в частных производных, связанных с оператором рассеяния третьего порядка / Т. В. Редькина, О. В. Новикова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 82–93. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-8.

УДК 530.182, 53.01, 51-7
DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-9

В. М. Журавлев

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН¹

Аннотация.

Актуальность и цели. В работе метод функциональных подстановок применяется к матричной системе первого порядка и выводятся соответствующие уравнения волновой динамики. Целью работы является вывод и анализ новой интегрируемой системы взаимодействия волн типа Бюргерса.

Материалы и методы. Основным методом, который используется в работе, является метод функциональных подстановок в матричной форме. Общий вид матричных уравнений представлен для произвольной конечной матричной размерности. Детальный анализ уравнений в покомпонентной форме представлен для размерности матриц 2×2 .

Результаты. Получена новая интегрируемая система взаимодействия волн. Для размерности 2×2 выписаны уравнения в покомпонентной форме. Построена редуцированная система, подобная системе трехволнового взаимодействия. Найден общий вид точных решений для редуцированной системы. Приведены конкретные примеры вещественных несингулярных решений.

Выводы. С помощью метода функциональных подстановок найдена новая интегрируемая система взаимодействия волн, полезная для практического использования в прикладных задачах.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, интегрируемые матричные уравнения, взаимодействие волн.

V. M. Zhuravlev

ON ONE NONLINEAR INTEGRABLE MODEL OF WAVE INTERACTION

Abstract.

Background. In this work, the functional method is applied to a first-order matrix system and the corresponding equations of wave dynamics are derived. The aim of the work is the conclusion and analysis of a new integrable Burgers-type wave interaction system.

Materials and methods. The main method used in this work is the method of functional permutations in matrix form. The general form of matrix equations is

¹ Работа выполнена в рамках проекта FSSS-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования.

© Журавлев В. М., 2019. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

presented for an arbitrary finite matrix dimension. A detailed analysis of the equations in an exploded form is presented for the dimension of 2×2 matrices.

Results. A new integrable system of wave interaction is obtained. For dimension 2×2 , the equations are written in component form. A reduced system is constructed, like a three-wave interaction system. The general form of exact solutions for the reduced system is found. Concrete examples of real non-singular solutions are given.

Conclusions. Using the method of functional substitutions, a new integrable system of wave interaction was found, which is useful for practical use in applied problems.

Keywords: functional permutation method, integrable matrix equations, wave interaction.

Введение

В статьях [1, 2] был разработан метод функциональных подстановок (МФП), который позволяет строить нелинейные интегрируемые модели волновой динамики, полезные в целом ряде прикладных задач. Общее описание метода вместе с рядом примеров приведены в работе [5]. Матричный вариант МФП позволил (см. [3–5]) получить ряд полезных и нетривиальных моделей, подобных известным моделям типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). В частности, в [4, 5] был развит метод многофункциональных подстановок, включающий в себя (как частный случай) и классический метод обратной задачи (МОЗ) [6, 7]. В настоящей работе приводится пример применения матричного варианта МФП к задачам волновой динамики, который частично был приведен в [5]. Приведенный пример может быть рассмотрен с двух точек зрения. Это теория неоднородных магнетиков [8] и теория взаимодействия волн, имеющая различные приложения. Также полностью приводится процедура вывода уравнений модели как в форме, близкой к уравнениям Ландау – Лифшица [8], которые используются в теории магнетиков, так и в форме уравнений, подобных теории трехволнового взаимодействия. Производится редукция уравнений системы к моделям, которые легче интерпретировать с точки зрения прикладных задач. Также приводятся решения вспомогательного матричного уравнения, которые позволяют строить различные варианты нелинейных моделей.

1. Метод матричных функциональных подстановок

Матричный вариант МФП [1–5] в размерности $1+1$ строится на основе двух исходных соотношений, называемых базовыми, для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(x, t)$ произвольной матричной размерности $n \times n$ с элементами, зависящими от двух независимых переменных x и t . Базовые соотношения могут иметь несколько различных форм [1, 2, 5]. Выбор той или иной формы определяется в первую очередь тем, как эти базовые соотношения связывают вспомогательную функцию $\hat{T}(x, t)$ с набором базовых функциональных параметров и вспомогательными уравнениями, которые, в конечном счете, и определяют форму искомых нелинейных уравнений. Простейшей формой базовых соотношений являются соотношения первого порядка следующего вида:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T}, \quad \hat{T}_t = \hat{B}\hat{T}, \quad (1)$$

где $\hat{A}(x, t)$ и $\hat{B}(x, t)$ – комплексные матричные функции той же размерности $n \times n$, которые называются коэффициентами базовых соотношений. Если функция $\hat{T}(x, t)$ задана, то функциональные параметры $\hat{A}(x, t)$ и $\hat{B}(x, t)$ однозначно выражаются через саму функцию $\hat{T}$ и ее производные:

$$\hat{A} = \hat{T}_x \hat{T}^{-1}, \quad \hat{B} = \hat{T}_t \hat{T}^{-1}. \quad (2)$$

Эти соотношения представляют собой обобщенные дифференциальные подстановки и, в частном случае [2], совпадают с подстановкой Коула – Хопфа. С другой стороны, требование, что функция $\hat{T}(x, t)$ одновременно обращает в тождество два уравнения (1), накладывает на функции $\hat{A}(x, t)$ и $\hat{B}(x, t)$ ограничение, которое можно выразить в форме одного матричного уравнения:

$$\hat{A}_t - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0, \quad (3)$$

совпадающего по форме с уравнением Захарова – Шабата в теории МОЗ [6], но имеющего несколько иной смысл, поскольку не содержит в явном виде спектрального параметра.

При выполнении (3) все производные функции $\hat{T}$ можно выразить через саму функцию $\hat{T}$:

$$\hat{T}^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial t^k} \hat{T} = \hat{A}^{[n,k]} \hat{T},$$

где матричные функции $\hat{A}^{[n,k]}$ могут быть вычислены рекуррентно по формулам:

$$\hat{A}^{[n+1,k]} = \hat{A}_x^{[n,k]} + \hat{A}^{[n,k]} \hat{A}, \quad \hat{A}^{[n,k+1]} = \hat{A}_t^{[n,k]} + \hat{A}^{[n,k]} \hat{B}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

с начальными условиями:

$$\hat{A}^{[1,0]} = \hat{A}, \quad \hat{A}^{[0,1]} = \hat{B}.$$

К базовой системе (1) можно добавить произвольное интегрируемое уравнение для $\hat{T}$. В качестве такого интегрируемого уравнения проще всего использовать линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\hat{C}_{n,k}$ конечного порядка L :

$$\sum_{k=0}^L \sum_{n=0}^L \hat{C}_{n,k} \hat{T}^{[n,k]} = 0. \quad (5)$$

Эти уравнения, называемые в дальнейшем **вспомогательными**, в итоге с помощью соотношений (2) и (4) после исключения из них всех производных функции $\hat{T}$ и ее самой превращаются в нелинейные уравнения, относительно элементов матричных функций $\hat{A}, \hat{B}$:

$$\sum_{k=0}^L \sum_{n=1}^L \hat{C}_{n,k} \hat{A}^{[n,k]} + \hat{C}_{00} = 0. \quad (6)$$

Вспомогательное уравнение в форме (6) вместе с уравнением (3) и системой равенств (4) образуют замкнутую систему относительно элементов двух функций $\hat{A}, \hat{B}$.

2. Матричные модели первого порядка

Рассмотрим вспомогательное уравнение для $\hat{T}$ следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{H}(x, t)\hat{T}_x + \hat{Q}(x, t)\hat{T}, \quad (7)$$

где $\hat{H}(x, t)$ и $\hat{Q}(x, t)$ – некоторые заданные матрицы координат и времени. Используя базовые соотношения (1), получаем из этого уравнения следствие в виде уравнения связи:

$$\hat{B} = \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}. \quad (8)$$

Подставляя это соотношение в уравнение связи (3), находим:

$$A_t = \frac{\partial}{\partial x}(\hat{H}\hat{A} + \hat{Q}) - [\hat{A}, \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}]. \quad (9)$$

Это уравнение полезно преобразовать к следующему виду:

$$A_t - \hat{H}\hat{A}_x + [\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} + [\hat{A}, \hat{Q}] - \hat{H}_x\hat{A} - \hat{Q}_x = 0.$$

Такое уравнение является нелинейным уравнением первого порядка относительно матрицы $\hat{A}$ с квадратичной нелинейностью и произвольными матрицами $\hat{H}$ и $\hat{Q}$ как функциями x и t . В частном случае:

$$\hat{H} = \hat{H}(t), \quad \hat{Q} = \hat{Q}(t),$$

уравнение (9) упрощается и принимает такой вид:

$$A_t - \hat{H}\hat{A}_x + [\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} + [\hat{A}, \hat{Q}] = 0. \quad (10)$$

Это уравнение имеет квадратичную нелинейность и может иметь несколько интерпретаций в зависимости от выбора его коэффициентов $\hat{H}$ и $\hat{Q}$, а также матричной размерности. Далее мы будем рассматривать уравнения, соответствующие матричной размерности 2 с матрицами $\hat{H}$ и $\hat{Q}$, зависящими только от t , или постоянными матрицами.

3. Уравнение типа Ландау – Лифшица

В качестве основного примера рассмотрим уравнение (10) в матричной размерности 2×2 для выбора его матричных коэффициентов в следующем виде (см. приложение):

$$\hat{H} = p(t)\hat{\sigma}_0 + (\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}), \quad \hat{Q} = q_0(x, t)\hat{\sigma}_0 + (\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{s}}). \quad (11)$$

Здесь введены трехмерные векторы:

$$\mathbf{H} = (H_1(t), H_2(t), H_3(t)), \quad \mathbf{Q} = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)).$$

Используя соотношения (32) (см. приложение), можно записать:

$$\begin{aligned}\hat{H}\hat{A}_x &= \hat{\sigma}_0((\mathbf{H}, \mathbf{a}_x) + pa_{0,x}) + i(\hat{s}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x]) + a_{0,x}(\mathbf{H}, \hat{s}) + p(\mathbf{a}, \hat{s}), \\ [\hat{H}, \hat{A}] &= 2i(\hat{s}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}]),\end{aligned}\quad (12)$$

$$[\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} = -2i(\hat{s}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}])a_0 + 2(\hat{s}, [[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}]), \quad [\hat{A}, \hat{Q}] = 2i(\hat{s}, [\mathbf{a} \times \mathbf{Q}]).$$

В результате (10) приводим к следующей системе уравнений для компонент матрицы $\hat{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}a_0 = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H}, \mathbf{a}) + pa_{0,x} - q_{0,x}, \quad (13)$$

$$\mathbf{a}_t = i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x] - 2[[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}] + 2i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}]a_0 + \mathbf{H}a_{0,x} - 2i[\mathbf{a} \times \mathbf{Q}] - pa.$$

Полагая: $a_0 = \varphi_x$, эту систему уравнений можно преобразовать к виду

$$a_0 = \varphi_x, \quad \varphi_t = (\mathbf{H}, \mathbf{a}) + pa_0 + q_0, \quad (14)$$

$$\mathbf{a}_t = i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x] - 2[[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}] + 2i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}]\varphi_x + \mathbf{H}\varphi_{xx} + 2i[\mathbf{Q} \times \mathbf{a}] - pa.$$

Система уравнений (14) представляет собой уравнение типа Ландау – Лифшица [8] для неоднородного магнетика, находящегося в однородном переменном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}$ и с некоторыми дополнительными переменными $\mathbf{Q}$ и φ . Физический смысл этих переменных для задач с магнетиками требует отдельного анализа. Хотя это уравнение и отличается от уравнения Ландау – Лифшица для нелинейного магнетика Гейзенберга [8], тем не менее оно может быть использовано для анализа других типов магнетиков.

4. Редуцированная система

Для целей данной работы представляет интерес интерпретация системы уравнений (13) с точки зрения их использования в нелинейной волновой динамике. Для преобразования этой системы к нужному виду рассмотрим частный случай, соответствующий выбору:

$$\mathbf{H} = (0, 0, c), \quad \mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3), \quad (15)$$

где c, q_1, q_2, q_3 , а также p, q_0 – комплексные постоянные. Тогда система уравнений (13) может быть записана в такой форме:

$$\begin{aligned}\varphi_t - p\varphi_x &= a_3c, \\ a_{3,t} &= 2c(a_1^2 + a_2^2) + pa_{3,x} + c\varphi_{xx} + 2i(a_1q_2 - a_2q_1), \\ a_{1,t} - pa_{1,x} &= -ica_{2,x} - 2a_3a_1c - 2ica_2\varphi_x + 2i(q_2a_3 - q_3a_2), \\ a_{2,t} - pa_{2,x} &= ica_{1,x} - 2a_3a_2c + 2ica_1\varphi_x + 2ic(q_3a_1 - q_1a_3).\end{aligned}\quad (16)$$

Деля подстановку $a_3 = (\varphi_t - p\varphi_x)c^{-1}$ и вводя функции $A^\pm = a_1 \pm ia_2$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - 2p\varphi_{xt} - (c^2 - p^2)\varphi_{xx} &= 2c^2 A^+ A^- + c(r^+ A^- - r^- A^+), \\ A_t^\pm + (c - p)A_x^\pm + 2A^\pm(\varphi_t + (c - p)\varphi_x + q_3) - 2r^\pm(\varphi_t - p\varphi_x) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь введено дополнительно обозначение: $r^\pm = (q_1 \pm iq_2)/c$.

5. Приведение к стандартному виду

Система уравнений (17) представляет собой гиперболическую систему уравнений взаимодействия волн, напоминающую модель генерации второй гармоники в трехволновом взаимодействии [6, 7]. Система уравнений (17) имеет несколько редукций, которые интересны сами по себе. Запишем эти уравнения в новых координатах, полагая $\xi = x - ut$, $\eta = x - vt$ и, таким образом приводя систему к каноническому виду гиперболической системы. Условия обращения в ноль коэффициентов при производных $\varphi_{\xi\xi}$ и $\varphi_{\eta\eta}$ имеют без ограничения общности следующий вид:

$$u = p - |c|, \quad v = p + |c|. \quad (18)$$

Полагая $c \neq 0$, приводим первое уравнение системы (17) к виду

$$2\varphi_{\xi\eta} + A^+ A^- + \frac{1}{c}(r^- A^+ - r^+ A^-) = 0.$$

Второе уравнение системы (17) при этом оказывается таким:

$$\begin{aligned} (c + |c|)A_t^\pm + (c - |c|)A_\xi^\pm + 2A^\pm[(c + |c|)\varphi_\tau + (c - |c|)\varphi_\xi + q_3] - \\ - 2|c|r^\pm(\varphi_\xi - \varphi_\eta) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Два варианта выбора $c > 0$ и $c < 0$ симметричны по отношению к замене переменных $\tau \rightarrow \xi$ и наоборот:

$$A_t^\pm + A^\pm(2\varphi_\tau + q_3/|c|) - 2r^\pm(\varphi_\xi - \varphi_\tau) = 0, \quad c > 0, \quad (20)$$

$$A_\xi^\pm + A^\pm(2\varphi_\xi - q_3/|c|) - 2r^\pm(\varphi_\tau - \varphi_\xi) = 0, \quad c < 0. \quad (21)$$

Поэтому достаточно рассматривать только один из этих вариантов. Для определенности будем полагать $c > 0$.

5.1. Редукция к уравнению Лиувилля

Полагая $r^\pm = 0$, полученную систему можно привести к хорошо известному уравнению Лиувилля. При такой редукции второе уравнение системы (17) при $c > 0$ имеет явное общее решение следующего вида:

$$\ln A + 2\varphi = -\gamma\tau + \ln\psi(\xi),$$

где $\gamma = q_3/|c|$ и $\psi(x - ct)$ – некоторая комплекснозначная функция одного вещественного аргумента. В результате первое уравнение системы (17) (при $c > 0$) примет такой вид:

$$\varphi_{\xi\tau} = -\frac{1}{2}e^{-4\varphi}e^{-\gamma\tau}|\psi(\xi)|^2. \quad (22)$$

В случае, если $\varphi(\xi, \tau)$ – вещественная функция, проводя замену переменных $dX = |\psi(\xi)|^2 d\xi$, $dT = e^{-\gamma\tau} d\tau$, уравнение (22) приводим к уравнению Лиувилля:

$$\varphi_{XT} = -\frac{1}{2}e^{-4\varphi}.$$

Эта редукция показывает, что полученная система в общем виде подобна уравнениям взаимодействия волн в среде с квадратичной нелинейностью. Для сравнения можно вспомнить уравнения генерации второй гармоники [7]:

$$P_t + uP_x = \delta_1 PQ, \quad Q_t + vQ_x = \delta_2 P^2.$$

Исключая из системы функцию Q с помощью первого уравнения этой системы, приходим к одному уравнению:

$$\Phi_{\xi\tau} = \frac{\delta_1 \delta_2}{(u-v)^2} e^{-2\Phi}.$$

5.2. Обобщенное уравнение типа Лиувилля

Приведем теперь в общем виде систему (17) к одному уравнению относительно функции φ . Решая пару уравнений (20) при $r^\pm \neq 0$ при $c > 0$ относительно $A^\pm$, находим:

$$A^\pm = \left(C^\pm(\xi) - r^\pm + r^\pm \frac{\partial}{\partial \xi} \int e^{2\varphi} d\tau \right) e^{-2\varphi},$$

здесь $C^+(\xi)$ и $C^-(\xi)$ – постоянные интегрирования по переменной τ . Подставляя эти соотношения в первое уравнение, приходим к одному уравнению для φ :

$$\begin{aligned} 2\varphi_{\xi\tau} = & \left(C^+(\xi) - r^+ + r^+ R \right) \left(C^-(\xi) - r^- + r^- R \right) e^{-4\varphi} - \\ & - \left(r^+ (C^-(\xi) - r^- + r^- R) - r^- (C^+(\xi) - r^+ + r^+ R) \right) e^{-2\varphi}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $R = \frac{\partial}{\partial \xi} \int e^{2\varphi} d\tau$

Полагая в этом уравнении $C^\pm = r^\pm = \text{const}$, приходим к более упрощенной форме общего уравнения (23):

$$2\varphi_{\xi\tau} = r^+ r^- R^2 e^{-4\varphi}, \quad R_\tau = 2\varphi_\xi e^{2\varphi}.$$

6. Построение решений для вспомогательных уравнений первого порядка

Решения системы (13), также как и системы (17), строятся на основе решений уравнения (7). Из (1) и (36) (см. приложение) находим выражение для a_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Имеем:

$$a_i = \frac{1}{2} Sp(\hat{\sigma}_i \hat{T}_x \hat{T}^{-1}). \quad (24)$$

Представим матрицу $\hat{T}$ в следующем виде:

$$\hat{T} = \Psi_0 \hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \Psi_{\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha}, \quad (25)$$

где $\Psi_i(x, t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, – функции, которые следует вычислить. Соответственно матрицу $\hat{T}^{-1}$ можно представить таким образом:

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{D} \left(\Psi_0 \hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^3 \Psi_{\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha} \right). \quad (26)$$

В результате получаем

$$\hat{T}_x \hat{T}^{-1} = \frac{1}{D} \left(\tau_{0,x} \hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^3 \tau_{\alpha,x} \hat{\sigma}_{\alpha} \right) \left(\tau_0 \hat{\sigma}_0 + \sum_{\beta=1}^3 \tau_{\beta} \hat{\sigma}_{\beta} \right) = \frac{1}{2D} \left(D_x \hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^3 R_{\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha} \right).$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \Psi_0^2 - \Psi_1^2 - \Psi_2^2 - \Psi_3^2,$$

$$R_{\alpha} = -\Psi_{0,x} \Psi_{\alpha} + \Psi_{\alpha,x} \Psi_0 + i \sum_{\beta,\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Psi_{\beta} \Psi_{\gamma,x}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Величины $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ представляют собой полностью антисимметричный символ Леви-Чивита. Общее решение уравнения (7) при условии $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $q_0 = q_3 = 0$ можно записать в таком виде:

$$\Psi_0 = \int_C \Psi_0(x, t, \omega) d\omega, \quad \Psi_1 = \int_C \Psi_1(x, t, \omega) d\omega, \quad (27)$$

$$\Psi_2 = \int_C \Psi_2(x, t, \omega) d\omega, \quad \Psi_3 = \int_C \Psi_3(x, t, \omega) d\omega, \quad (28)$$

здесь

$$\Psi_0 = \frac{1}{Z(\omega)} \left(M(\omega) e^{\omega(x+ct)/c - p^2(x-ct)/4c\omega} + \right.$$

$$+F(\omega)e^{i(q_2x-iq_1ct)/c} - G(\omega)e^{-i(q_2x-iq_1ct)/c}),$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{Z(\omega)} \left(N(\omega)e^{\omega(x+ct)/c - p^2(x-ct)/4c\omega} + \right. \\ \left. + F(\omega)e^{i(q_2x-iq_1ct)/c} + G(\omega)e^{-i(q_2x-iq_1ct)/c} \right),$$

$$\Psi_2 = V(\omega)e^{\omega(x+ct)/c - p^2(x-ct)/c\omega}, \quad \Psi_3 = U(\omega)e^{\omega(x+ct)/c - p^2(x-ct)/c\omega}. \quad (29)$$

Параметры этого решения имеют такой вид:

$$Z(\omega) = 16\omega^4 - 8(q_1^2 - q_2^2)\omega^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2, \quad p^2 = q_1^2 + q_2^2$$

$$X(\omega) = (16(q_2 - iq_1)\omega^2 + 4(q_2 + iq_1)p^2), \quad Y(\omega) = (16\omega^4 + 16i\omega^2q_1q_2 - p^2),$$

$$M(\omega) = V(\omega)\omega X(\omega) + U(\omega)Y(\omega),$$

$$N(\omega) = iU(\omega)\omega X(\omega) - iV(\omega)Y(\omega).$$

Функции $U(\omega), V(\omega), F(\omega), G(\omega)$ комплексного спектрального параметра ω задаются начальными условиями.

Решения для функций $a_i(x, t)$, соответствующие общим решениям (27), можно представить в таком виде:

$$a_0 = \phi_x = \frac{1}{2D(x, t)} \frac{\partial D(x, t)}{\partial x},$$

$$a_1 = \frac{1}{2D(x, t)} \left(i\Psi_2\Psi_3 \frac{\partial \ln(\Psi_3 / \Psi_2)}{\partial x} + \Psi_0\Psi_1 \frac{\partial \ln(\Psi_1 / \Psi_0)}{\partial x} \right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2D(x, t)} \left(i\Psi_2\Psi_3 \frac{\partial \ln(\Psi_3 / \Psi_1)}{\partial x} - \Psi_0\Psi_2 \frac{\partial \ln(\Psi_2 / \Psi_0)}{\partial x} \right),$$

$$a_3 = \frac{1}{2D(x, t)} \left(i\Psi_2\Psi_1 \frac{\partial \ln(\Psi_2 / \Psi_1)}{\partial x} + \Psi_0\Psi_3 \frac{\partial \ln(\Psi_3 / \Psi_0)}{\partial x} \right).$$

Соответственно:

$$A^+ = a_1 + ia_2 = \frac{1}{D(x, t)} (\zeta\theta_x - \theta\zeta_x), \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln D(x, t), \quad (30)$$

где $\theta = a_1 + ia_2$, $\zeta = \Psi_0 - \Psi_3$.

В случае дополнительной редукции $q_1 = q_2 = 0$ система уравнений для компонентов функции $\hat{T}$ примет такой вид:

$$\Psi_{0,t} = c\Psi_{3,x}, \quad \Psi_{3,t} = c\Psi_{0,x}, \quad \Psi_{1,t} = ic\Psi_{2,x}, \quad \Psi_{2,t} = -ic\Psi_{1,x}.$$

Эти уравнения эквивалентны следующим уравнениям:

$$\chi_{tt} = c^2\chi_{xx}, \quad \tau_3 = \chi_t, \quad \tau_0 = c\chi_x,$$

$$\theta_t^+ - c\theta_x^+ = 0, \quad \theta_t^- + c\theta_x^- = 0,$$

где $\theta^+ = \tau_1 + i\tau_2$ и $\theta^- = \tau_1 - i\tau_2$. Функции χ , τ_1 и τ_2 , вообще говоря, комплексные. Как уже отмечалось, в этом случае система уравнений редуцируется к уравнению Лиувилля.

Важным аспектом прикладных применений построенной системы уравнений является возможность находить условия вещественности и несингулярности ее решений относительно функции $\varphi(x, t)$. Функции $A^\pm$ могут быть комплексными.

Как показывает первичный анализ частных решений построенной нелинейной системы уравнений, большой набор вещественных решений может быть получен в случае выбора q_1 чисто мнимой величиной, а q_2 – вещественной. Однако в этом случае решения в большинстве своем оказываются сингулярными. Типичные примеры таких решений для функции $\varphi(x, t)$ приведены на рис. 1. На рис. 2 приведены соответствующие решения для функции $|A^+(x, t)|$. Эти решения получены для функций $\varphi_i(x, t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, следующего вида:

$$\psi_i(x, t) = \Phi_i(x, t, \omega) + \Phi_i(x, t, -\omega), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

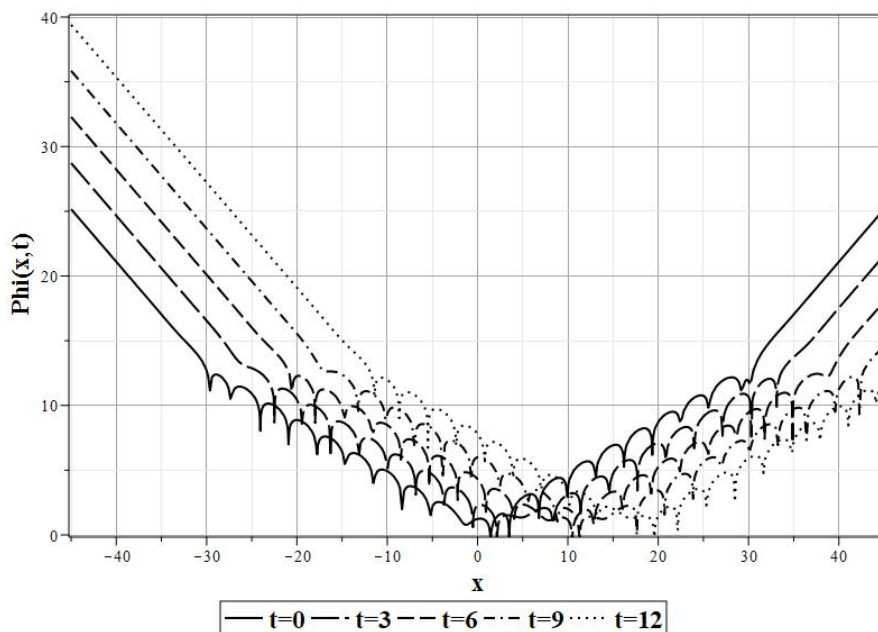


Рис. 1. Решение для φ при $c = -1$, $q_1 = 0,5i$, $q_2 = 1$ и $F(\omega) = -G(\omega) = \omega^2$

На рис. 1 приведены графики $\varphi(x, t)$ для $t = 0, 3, 6, 9, 12$ при выборе функций $U(\omega) = \omega^2 / 2$, $V(\omega) = \omega^2 / 2$, $F(\omega) = \omega^2$, $G(\omega) = -\omega^2$ и $\omega = 1$, $c = -1$, $q_1 = 0,5i$, $q_2 = 1$. Как видно из графиков, вблизи нулевых значений функции

$\varphi(x, t)$ имеет область, содержащая сингулярности как самой функции $\varphi(x, t)$, так и функции $|A^+(x, t)|$. Эта область перемещается как целое в положительном направлении оси x .

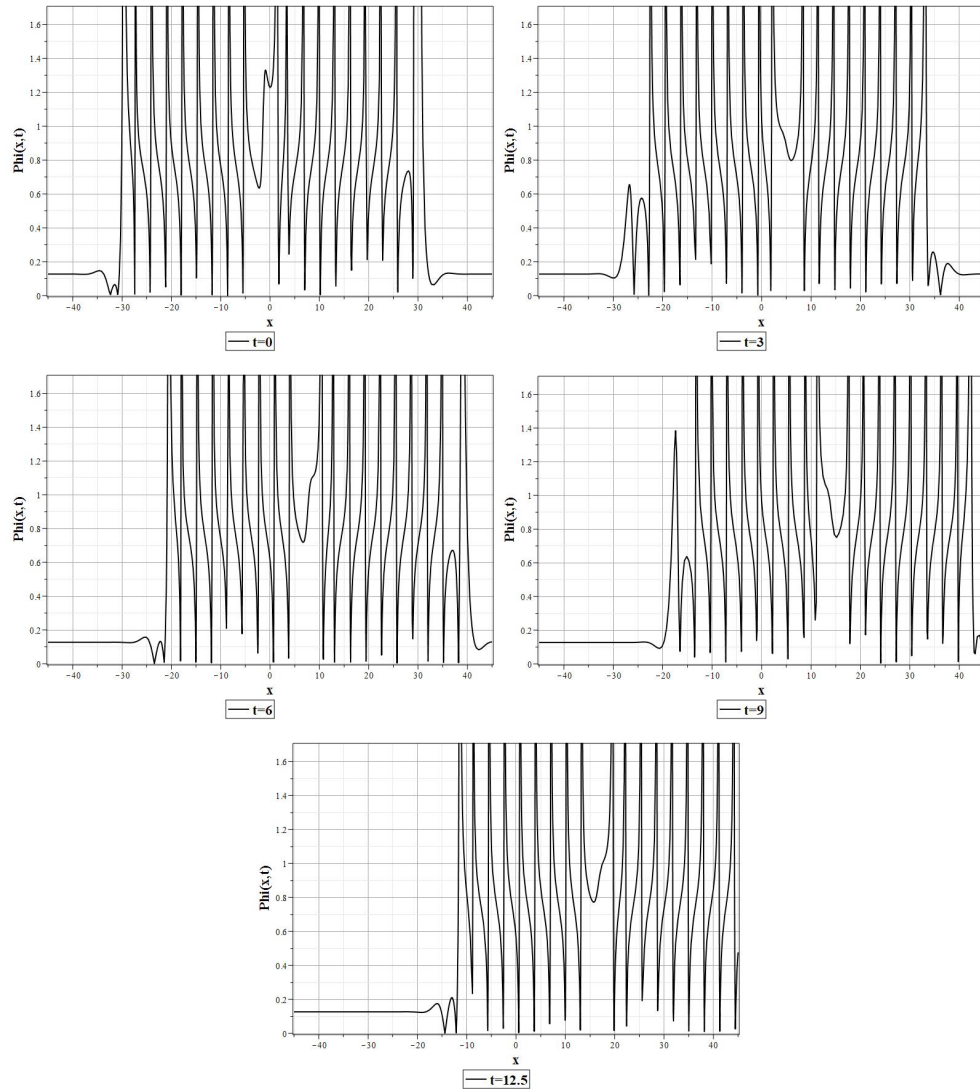


Рис. 2. Решение для $|A^+|$ при $c = -1$, $q_1 = 0,5i$, $q_2 = 1$ и $F(\omega) = -G(\omega) = \omega^2$

Несингулярные решения можно получить, если положить дополнительно $F(\omega) = G(\omega) = 0$. Типичные несингулярные решения приведены на рис. 3. Они соответствуют тем же значениям всех функций и параметров, что и на рис. 1, но при условии $F(\omega) = G(\omega) = 0$. Приведенные примеры решений не исчерпывают всех возможных типов решений. Для их анализа требуется отдельная дополнительная работа, которая выходит за пределы данной статьи.

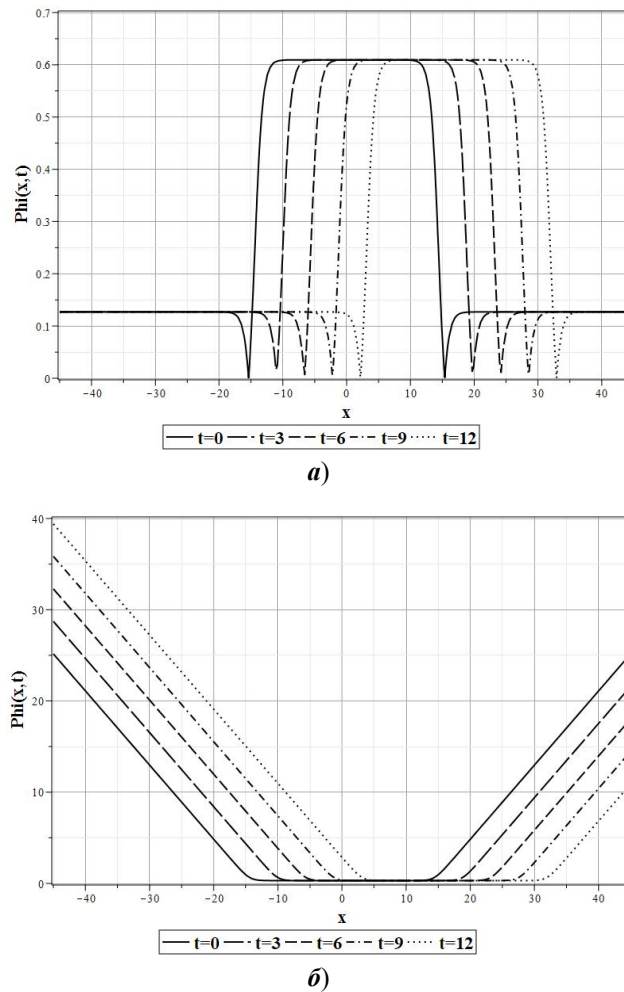


Рис. 3. Решение для $|A^+|$ (а) и ϕ (б) при $c = -1$, $q_1 = 0,5i$, $q_2 = 1$ и $F(\omega) = G(\omega) = 0$

Заключение

В работе рассмотрены новые примеры применения метода матричных функциональных подстановок к задаче отыскания интегрируемых нелинейных волновых уравнений. Ранее этот метод был описан в работах [1–3]. Построенные уравнения в предельном варианте переходят в уравнение Лиувилля и могут применяться в теории взаимодействия волн подобно моделям трехволнового взаимодействия и генерации второй гармоники в нелинейной оптике. В данной работе рассматривался только метод подстановок первого порядка в терминах работы [4], в которой был развит метод многофункциональных подстановок, включающий в себя и стандартный МОЗ в теории солитонов. Используя результаты указанной работы, можно получить многофункциональное расширение построенных решений при выборе тех же исходных матричных операторов. В работе приведен общий вид решений вспомогательного матричного уравнения. Это позволяет проводить подробные исследования типов решений построенных уравнений. Найденные в работе некоторые решения не исчерпывают всех возможных их типов.

Приложение

Формализм вычислений с матрицами размерности 2×2

Для анализа моделей, связанных с трехмерными векторами, полезно рассмотреть общие соотношения с матрицами размерности 2×2 . Введем следующие обозначения для матриц Паули $\hat{\sigma}_\alpha$ и единичной матрицы:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Матрицы $\hat{\sigma}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_i, [\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_i] = 0, i = 0, 1, 2, 3;$$

$$\hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta = -\hat{\sigma}_\beta \hat{\sigma}_\alpha = i \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}_\gamma; \quad (32)$$

$$[\hat{\sigma}_\alpha, \hat{\sigma}_\beta] = 2i \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}_\gamma \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – полностью антисимметричный символ Леви-Чивита: $\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$.

Таким образом, любая матричная функция $\hat{T}(x, t)$, заданная на линейной алгебре матриц 2×2 GL_2 , имеет следующий общий вид:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^3 \psi_i(x, t) \sigma_i, \quad (33)$$

где $\psi_i(x, t)$ – вспомогательные функции, связанные с компонентами матрицы $\hat{T}$ соотношениями:

$$T_{11} = \psi_0 + \psi_3, T_{11} = \psi_0 - \psi_3, T_{12} = \psi_1 - i\psi_2, T_{21} = \psi_1 + i\psi_2.$$

Для удобства интерпретации полезно ввести трехмерный вектор матриц Паули:

$$\hat{s} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3) \quad (34)$$

и трехмерный вектор $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. Тогда любая матрица 2×2 может быть записана в виде

$$\hat{T} = (\hat{s}, \psi) + \psi_0 \hat{\sigma}_0, \quad (35)$$

где

$$(\hat{s}, \mathbf{t}) = \psi_1 \hat{\sigma}_1 + \psi_2 \hat{\sigma}_2 + \psi_3 \hat{\sigma}_3 -$$

евклидово скалярное произведение векторов. Обратные формулы для вычисления коэффициентов ψ_i матриц $\hat{T}$ размерности 2×2 имеют следующий общий вид:

$$\psi_i = \text{Sp}(\hat{\sigma}_i \hat{T}) / 2, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (36)$$

где Sp – операция вычисления следа матрицы.

Пусть теперь имеются две матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, которые могут быть представлены в виде

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^3 a_i(x, t) \hat{\sigma}_i, \quad \hat{B} = \sum_{i=0}^3 b_i(x, t) \hat{\sigma}_i. \quad (37)$$

При введении векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ эти матрицы можно записать так:

$$\hat{A} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{a}) + a_0 \hat{\sigma}_0, \quad \hat{B} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{b}) + b_0 \hat{\sigma}_0.$$

Согласно свойствам матриц Паули (31) имеем теперь следующие общие соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= i([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}) + a_0(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{s}}) + b_0(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{s}}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\hat{\sigma}_0, \\ [\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 2i([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}). \end{aligned} \quad (38)$$

здесь $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ – векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Библиографический список

1. Журавлев, В. М. Нелинейные уравнения, связанные с уравнениями теплопроводности и Д'Аламбера с помощью подстановок типа Коула – Хопфа / В. М. Журавлев, А. В. Никитин // *Нелинейный мир*. – 2007. – Т. 5, № 9. – С. 603–611.
2. Журавлев, В. М. Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // *Теоретическая и математическая физика*. – 2009. – Т. 158, № 1. – С. 58–71.
3. Журавлев, В. М. Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и функциональные подстановки / В. М. Журавлев // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2018. – № 1. – С. 147–163.
4. Журавлев, В. М. Многофункциональные подстановки и солитонные решения интегрируемых нелинейных уравнений / В. М. Журавлев // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2019. – № 3. – С. 93–119.
5. Журавлев, В. М. Нелинейные интегрируемые модели физических процессов / В. М. Журавлев // *Метод функциональных подстановок*. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2019.
6. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – Москва : Наука, 1980. – 319 с.
7. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Ж. Гиббон, Х. Моррио. – Москва : Мир, 1988. – 694 с.
8. Гуревич, А. Г. Магнитные колебания и волны / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков. – Москва : Физматлит, 1973. – 464 с.

References

1. Zhuravlev V. M., Nikitin A. V. *Nelineyny mir* [Nonlinear world]. 2007, vol. 5, no. 9, pp. 603–611. [In Russian]

2. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 158, no. 1, pp. 58–71. [In Russian]
 3. Zhuravlev V. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2018, no. 1, pp. 147–163. [In Russian]
 4. Zhuravlev V. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 3, pp. 93–119. [In Russian]
 5. Zhuravlev V. M. *Metod funktsional'nykh podstanovok* [Functional substitution method]. Ulyanovsk: Izd-vo UIGU, 2019. [In Russian]
 6. Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevskiy L. P. *Teoriya solitonov: Metod obratnoy zadachi* [Soliton Theory: inverse scatter method]. Moscow: Nauka, 1980, 319 p. [In Russian]
 7. Dodd R., Eyllbek Dzh., Gibbon Zh., Morrio Kh. *Solitony i nelineynye volnovye uravneniya* [Solitons and nonlinear wave equations]. Moscow: Mir, 1988, 694 p. [In Russian]
 8. Gurevich A. G., Melkov G. A. *Magnitnye kolebaniya i volny* [Magnetic vibrations and waves]. Moscow: Fizmatlit, 1973, 464 p. [In Russian]
-

Журавлев Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник, Самарский
национальный исследовательский
университет, (Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34); профессор,
кафедра теоретической физики,
Ульяновский государственный
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, leading researcher, Samara
National Research University
(34 Moskovskoye highway, Samara,
Russia); professor, sub-department
of theoretical physics, Ulyanovsk
State University (42 L'va Tolstogo
street, Ulyanovsk, Russia)

Образец цитирования:

Журавлев, В. М. Об одной нелинейной интегрируемой модели взаимодействия волн / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 94–108. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-9.

Вниманию авторов!

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» приглашает специалистов опубликовать на его страницах оригинальные статьи, содержащие новые научные результаты в области математики, физики, механики, а также обзорные статьи по тематике журнала.

Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

Редакция принимает к рассмотрению статьи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows (тип файла – RTF, DOC).

Необходимо представить статью в электронном виде (VolgaVuz@mail.ru) и дополнительно на бумажном носителе в двух экземплярах. Оптимальный объем рукописи 10–14 страниц формата А4. Основной шрифт статьи – Times New Roman, 14 pt через полупетельный интервал. Статья **обязательно** должна содержать индекс УДК, ключевые слова и развернутую аннотацию объемом от 100 до 250 слов, имеющую четкую структуру **на русском** (Актуальность и цели. Материал и методы. Результаты. Выводы) и **английском языках** (Background. Materials and methods. Results. Conclusions).

Обращаем внимание авторов на то, что в соответствии с этическим кодексом журнала для обеспечения единообразия перевод фамилии, имени, отчества каждого автора на английский язык (в сведениях об авторах и списке литературы) осуществляется автоматически с использованием программы транслитерации в кодировке BGN (сайт translit.ru).

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте статьи и представлены в виде отдельных файлов (растровые рисунки в формате TIFF, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt). Рисунки должны сопровождаться подрисуночными подписями.

Формулы в тексте статьи **обязательно** должны быть набраны в редакторе формул Microsoft Word Equation (версия 3.0) или MathType. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования **необходимо** соблюдать и в рисунках. Допускается вставка в текст специальных символов (с использованием шрифтов Symbol).

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать **очередности ссылок** на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. **Требования к оформлению списка литературы** на русские и иностранные источники: **для книг** – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; **для журнальных статей, сборников трудов** – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; **для материалов конференций** – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам статьи **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание и должность, место и юридический адрес работы (на русском и английском языках), e-mail, контактные телефоны (желательно сотовые).

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. Рукопись, полученная редакцией, не возвращается. Редакция оставляет за собой право проводить редакционную и допечатную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла, без согласования с автором.

Статьи, оформленные без соблюдения приведенных выше требований, к рассмотрению не принимаются.

Уважаемые читатели!

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год. Научные специальности журнала:

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

01.01.07 Вычислительная математика

01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика

01.04.02 Теоретическая физика

01.04.05 Оптика

01.04.10 Физика полупроводников

01.04.15 Физика и технология наноструктур, атомная и молекулярная физика

01.04.16 Физика атомного ядра и элементарных частиц

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. (841-2) 36-84-87. E-mail: VolgaVuz@mail.ru

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

ЗАЯВКА

Прошу оформить подписку на журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» на 20__ г.

№ 1 – _____ шт., № 2 – _____ шт., № 3 – _____ шт., № 4 – _____ шт.

Наименование организации (полное) _____

ИНН _____ КПП _____

Почтовый индекс _____

Республика, край, область _____

Город (населенный пункт) _____

Улица _____ Дом _____

Корпус _____ Офис _____

ФИО ответственного _____

Должность _____

Тел. _____ Факс _____ E-mail _____

Руководитель предприятия _____

(подпись)

(ФИО)

Дата «____» _____ 20__ г.